

EESTI TA ASTROFÜÜSIKA JA ATMOSFÄÄRIFÜÜSIKA INSTITUUT

—
TARTU ÜLIKOOL

—
BIOGEOFÜÜSIKA ÕPPETOOL / KESKKONNAFÜÜSIKA INSTITUUT

KIIRGUSLEVI

Andres Kuusk

Tartu-Tõravere 1993

Sissejuhatus

Kiirguslevil on otsustav osa mitmetes füüsikalistes protsessides. Olulised on nii kiirguslevi energeetiline kui informatsiooniline aspekt. Paljudel juhtudel on kiirguslevi ainuke energia ülekande võimalus (näiteks Maa saab kogu energia Päikeselt kiirgusena) või moodustab energia levi kiirguse teel olulise osa keskkonna energiabilansis (planeetide ja tähtede atmosfäärid).

Kiirguslevi informatsiooniline aspekt on oluline kaugseires. Optiliste (ja soojuslike) distantismõõtmiste tulemuste interpreteerimine eeldab, et me tunneme objektilt lähtunud kiirgusega teel vastuvõtjani aset leidvaid muutusi.

Käesolev loengukursus on mõeldud valikkursusena geofüüsika IV kursuse üliõpilastele ja magistrandidele. Kursuse koostaja ootab üliõpilastelt kiirguslevi füüsikaliste protsesside mõistmist ja kirjeldamiskust, levivõrrandi erijuhtude ja põhiliste lahendusmeetodite tundmist. Konspektis viidatud algallikate poole pöördumine on vajalik juhtudel, kui konspekt on liiga lakooniline, et võimaldada arusaamist.

Magistrandidelt ootaks enamuse viidatud algallikatega tutvumist ning enamikel juhtudel ka sellekohase materjali läbitöötamist. Paralleelsete viidete korral ei ole kurjast ka kõigi viidatud töödega tutvumine, sest algallikad erinevad üksteisest protsesside eri aspektide esiletoomise poolest.

Juuni 1993
Tõraveres

A. Kuusk

1 Kiirgusvälja ja keskkonda iseloomustavad suurused

1.1 Radiomeetrilised karakteristikud – Radiometric quantities

Names	Symbol and relation	Units	Remarks
kiirgusenergia radiant energy	Q	[J] = [m ² kg s ⁻²]	
kiirgusvoog radiant flux	$\phi = \frac{dQ}{dt}$	[W] = [J s ⁻¹]	"Radiant power" is used as a synonym
kiirguse voo tihedus radiant flux density	$M, E = \frac{d\phi}{dA} = \frac{d^2Q}{dA dt}$	[Wm ⁻²]	Radiant flux of any origin crossing an area element dA
keha kiirgamisvõime radiant exitance	$M = \frac{d\phi}{dA}$	[Wm ⁻²]	Radiant flux of any origin emerging from an area element
valgustatus irradiance	$E = \frac{d\phi}{dA}$	[Wm ⁻²]	Radiant flux of any origin incident onto an area element
intensiivsus radiance	$B = \frac{d^2\phi}{d\Omega da \cos(\theta)}$	[Wm ⁻² sr ⁻¹]	The radiance is a conservative quantity in an optical system
intensiivsus punktallika korral radiant intensity	$I = \frac{d\phi}{d\Omega}$	[Wsr ⁻¹]	May be used only for radiation outgoing from point sources
ekspositsioon radiant exposure	$H = \frac{dQ}{dA} = \int_{t_1}^{t_2} E dt$	[J m ⁻² per exposer time]	May be used for hourly or daily sums of global radiation, etc.

The symbols + and - (or ↑ and ↓) could be added as a superscript to each radiative quantity to indicate the direction of flow.

1.2 Materjali karakteristikud – Material characteristics

Characteristics	Symbol and relation	Remarks
kiirgusvõime (hallustegur) emittance	$\epsilon = \frac{M_\epsilon}{M_{\epsilon=1}}$	$\epsilon = 1$ for a black body
neeldumiskoeffitsient absorptance	$\alpha = \frac{\phi_a}{\phi_i}$	ϕ_a - the absorbed radiant flux ϕ_i - the incident radiant flux
peegeldumiskoeffitsient reflectance (albedo)	$\rho = \frac{\phi_r}{\phi_i}$	ϕ_r - the reflected radiant flux
▸ läbilaskekoeffitsient transmittance	$\tau = \frac{\phi_t}{\phi_i}$	ϕ_t - the radiant flux transmitted through a layer or a surface
nõrgenemiskoeffitsient extinction coefficient	σ_e	
neeldumiskoeffitsient absorption coefficient	$\sigma_a = -\frac{1}{B} \frac{dB}{ds}$	$[\text{m}^{-1}]$ for a collimated beam
hajumiskoeffitsient scattering coefficient	σ_s	
ühekordse hajumise albedo single scattering albedo	$\tilde{\omega} = \frac{\sigma_s}{\sigma_e} = \frac{\sigma_e - \sigma_a}{\sigma_e} = 1 - \tilde{a}$	\tilde{a} - absorption number
optiline teepikkus (sügavus) optical depth	$\delta(s) = \int_0^s \sigma_e(s') ds'$	$\tau = e^{-\delta}$ - transmittance

Hajumine ruumielemendis – Scattering in a volume element dV [m^3].

hajumisfunktsioon scattering function	$\gamma_s(\Omega_i, \Omega_s) = \frac{d^3 \phi_s(\Omega_i, \Omega_s)}{dV d\Omega_s dE_i(\Omega_i)}$	$[\text{m}^{-1} \text{sr}^{-1}]$	For directional incoming and outgoing radiation
hajumise faasifunktsioon scattering phase function	$p(\phi_s) = p(\Omega_i, \Omega_s) = \frac{4\pi}{\sigma_s} \gamma_s(\Omega_i, \Omega_s)$	dimension = 1	For directional incoming and outgoing radiation
hajumiskoeffitsient scattering coefficient	$\sigma_s = \int_{4\pi} \gamma_s(\Omega_i, \Omega_s) d\Omega_s$	$[\text{m}^{-1}]$	For directional incoming, but multidirectional outgoing radiation
hajumise allikfunktsioon scattering source function	$J_s(\Omega_s) = \frac{1}{\sigma_s} \int_{4\pi} \gamma_s(\Omega_i, \Omega_s) dE_i(\Omega_i)$	$[\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}]$	For directional outgoing, but multidirectional incoming radiation
faasifunktsioon plaatkeskkonnas area scattering phase function (Ross's Γ -function)	$\frac{1}{\pi} \Gamma_L(\Omega_i, \Omega_s) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} \frac{g_L(\Omega_L)}{2\pi} \gamma_L(\Omega_L, \Omega_i, \Omega_s) \Omega_i \cdot \Omega_L \Omega_s \cdot \Omega_L d\Omega$	$[\text{sr}^{-1}]$	For directional incoming and outgoing radiation in a foliage medium γ_L - scattering function of a leaf $g_L(\Omega_L)$ - distribution density of leaf normals

Peegeldumine pinnaelemendilt – Reflection at an area element dA [m²]

peegeldumisfunktsioon
reflection function
(bidirectional reflectance distribution function (BRDF))

$$\gamma_r(\Omega_i, \Omega_r) = \frac{d^3 \phi_r(\Omega_i, \Omega_r)}{\cos(\theta_r) d\Omega_r \cos(\theta_i) dE_i(\Omega_i) dA}$$

[sr⁻¹] For directional incoming and outgoing radiation

peegeldumisindikatris
reflection indicatrix

$$\xi_r(\Omega_i, \Omega_r) = \frac{\pi}{\rho(\Omega_i)} \gamma_r(\Omega_i, \Omega_r)$$

dimension = 1 For directional incoming and outgoing radiation
(IAMAP, Radiation Commission)

heleduskoeffitsient
bidirectional reflectance factor

$$\rho(\Omega_i, \Omega_r) = \pi \gamma_r(\Omega_i, \Omega_r)$$

dimension = 1 For directional incoming and outgoing radiation

Fresnel'i peegeldumiskoeffitsient

$$\rho_s = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)}; \quad \rho_p = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_r)}{\tan^2(\theta_i + \theta_r)}$$

Fresnel reflectance

$$\rho_{Fr} = \frac{1}{2}(\rho_s + \rho_p), \quad \theta_r - \text{angle of refraction}$$

Lambertian surface

Radiance B is constant for any angle of reflection θ

hemispherical reflectance
for directional incidence

$$\rho(\Omega_i) = \int_{2\pi} \gamma_r(\Omega_i, \Omega_r) \cos(\theta_r) d\Omega_r$$

For directional incoming,
but multidirectional outgoing radiation

(directional-hemispherical reflectance)

peegeldumise allikfunktsioon
reflection source function

$$J_r(\Omega_r) = \int_{2\pi} \gamma_r(\Omega_i, \Omega_r) \cos(\theta_i) dE_i(\Omega_i)$$

[W m⁻² sr⁻¹] For directional outgoing, but multidirectional incoming radiation
incident from a hemisphere

hemispherical-directional
reflectance factor

$$\rho(\Omega_r) = \frac{J_r(\Omega_r) \pi}{E_i}, \quad E_i = \int_{2\pi} \cos(\theta_i) dE_i(\Omega_i)$$

For directional outgoing, but multidirectional
incoming radiation incident from a hemisphere

Pinnaelemendi läbilase – Transmission through an area element dA [m^2]

läbilaskefunktsioon
transmission function
(bidirectional transmittance distribution function (BTDF))

$$\gamma_t(\Omega_i, \Omega_t) = \frac{d^3 \phi_t(\Omega_i, \Omega_t)}{\cos(\theta_t) d\Omega_t \cos(\theta_i) dE_i(\Omega_i) dA} \quad [sr^{-1}]$$

For directional incoming and outgoing radiation

läbilaskeindikatriss
transmission indicatrix

$$\xi_t(\Omega_i, \Omega_t) = \frac{\pi}{\tau(\Omega_i)} \gamma_t(\Omega_i, \Omega_t) \quad \text{dimension} = 1$$

For directional incoming and outgoing radiation
(IAMAP, Radiation Commission)

hemispherical transmittance for directional incidence

$$\tau(\Omega_i) = \int_{2\pi} \gamma_t(\Omega_i, \Omega_t) \cos(\theta_t) d\Omega_t$$

For directional incoming,
but multidirectional outgoing radiation

läbilaske allikfunktsioon
transmission source function

$$J_t(\Omega_t) = \int_{2\pi} \gamma_t(\Omega_i, \Omega_t) \cos(\theta_t) dE_i(\Omega_i) \quad [W m^{-2} sr^{-1}]$$

For directional outgoing, but multidirectional incoming
radiation incident from a hemisphere

directional transmittance factor
for hemispherical incidence

$$\tau(\Omega_t) = \frac{J_t(\Omega_t) \pi}{E_i}, \quad E_i = \int_{2\pi} \cos(\theta_i) dE_i(\Omega_i) \quad [W m^{-2}]$$

For directional outgoing, but multidirectional
incoming radiation incident from a hemisphere

1.3 Taimkatte fütomeetrilised parameetrid – Phytometric characteristics of a plant stand

lehepindala tihedus leaf (foliage) area density	$u(x, y, z)$ $u(r)$	$[\text{m}^{-1}]$	
lehepindala indeks leaf area index (LAI)	$L = \int_0^H u(z) dz$	dimension = 1	
lehenormaalide jaotustihedus leaf normal distribution density	$\frac{1}{2\pi} g_L(\Omega_L)$	$[\text{sr}^{-1}]$	
∞ Ross-Nilsoni G-funktsioon mean projection of unit leaf area (Ross & Nilson's G-function)	$G(\Omega) = \int_{2\pi} \frac{g_L(\Omega_L)}{2\pi} \Omega \cdot \Omega_L d\Omega_L$		
koosluse tihedus stand density		$[\text{m}^{-2}]$	Number of trees per unit of ground area

References

- [1] * American National Standard Nomenclature and Definitions for Illuminating Engineering. RP-16, Illuminating Engineering Society. N.-Y., 1968. 49 p.
- [2] Chandrasekhar, S. Radiative Transfer. Dover Publ., New York. 1960.
- [3] Grum, F., Becherer, R.J. Optical Radiation Measurements. Vol.1. Radiometry. Acad Press, New York, 1979. 335 p.
- [4] * (Comission Internationale de l'Eclairage (CIE) for radiometric and photometric terms) International Lighting Vocabulary. CIE Publ. No. 17 (E-1.1). International Commission on Illumination (CIE), Paris, France.
- [5] Jerlov, N.G. Marine Optics. Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York, 1976.
- [6] Kriebel, K.T. Reflection Properties of Vegetated Surfaces: Tables of Measured Spectral Biconical Reflectance Factors. Meteorologisches Institut, Wissensch. Mitt. Nr. 29, München, 1977. 82 p.
- [7] Nicodemus, F.E., Richmond, J.C., Hsia, J.J., Venable, W.H., Jr., Ginsberg, I.W., and Limperis, T. Geometrical Considerations for Reflectance Nomenclature. National Bureau of Standards Report, 1977.
- [8] Ross, J. The Radiation Regime and Architecture of Plant Stands. W. Junk Publ., The Hague, 1981. 391 p.
- [9] Slater, P.N. Remote Sensing. Optics and Optical Systems. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass., 1980. 575 p. 10.
- [10] Terminology and Units of Radiation Quantities and Measurements. Ed. by E. Raschke. IAMAP, Radiation Commission, Boulder, Col., 1978. 17 p.

* These issues have been referenced in [3], [5], [9], [10].

1.4 Intensiivsuse seos Pointingi vektoriga

Pointingi vektor

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

on hetkeline elektromagnetvälja kirjeldaja.

Olgu $W(S_x, S_y, S_z) dS_x dS_y dS_z$ tõesaosus, et vektori lõpp on ruumielemendis $dS_x dS_y dS_z$, või sfäärilistes koordinaatides $W(S, \theta, \phi) S^2 dS d\omega$, siis on kiire intensiivsus

$$I = \int_0^\infty S W(S, \theta, \phi) S^2 dS,$$

s.t. kõigi suunas (θ, ϕ) Pointingi vektorite summa.

Keskmine intensiivsus

$$\bar{I} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty S W(S, \theta, \phi) S^2 dS,$$

voovektor

$$\vec{F} = \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty S \vec{s} W(S, \theta, \phi) S^2 dS$$

S - hetkeline Pointingi vektori moodul,

\vec{s} - suunavektor (ühikvektor).

1.5 Stokes'i parameetrid

(Chandrasekhar, 1953; Bohren & Huffman, 1986)

Hajumise ja peegeldumise tulemusena tekib üldjuhul kiirguse polarisatsioon. Ka laser genereerib polariseeritud kiirgust. Kiirguse polarisatsiooni kirjeldamiseks on vajalikud 4 parameetrit, mis määravad

- intensiivsuse
- polarisatsiooniastme
- polarisatsioonitasandi
- kiirguse elliptilisuse.

Kiirguse polarisatsiooni kirjeldamiseks võttis Stokes 1852. a. kasutusele 4 parameetrit, mis on nüüd tuntud Stokes'i parameetritena (või ka Stokes'i komponendid). NB! Erinevad autorid kasutavad nii erinevaid tähistusi kui ka mõneti erinevaid definitsioone!

Polariseeritud kiirguse saab esitada kahe perpendikulaarse harmoonilise võnkumise abil

$$\begin{aligned}\xi_l &= \xi_l^{(0)} \sin(\omega t - \epsilon_l), \\ \xi_r &= \xi_r^{(0)} \sin(\omega t - \epsilon_r),\end{aligned}\tag{1}$$

ω - ringsagedus, $\xi_l^{(0)}$, $\xi_r^{(0)}$, ϵ_l , ϵ_r - konstandid.

Sobiva telgede valiku korral

$$\begin{aligned}\xi_l &= \xi^{(0)} \cos \beta \sin \omega t \\ \xi_r &= \xi^{(0)} \sin \beta \cos \omega t,\end{aligned}\tag{2}$$

kus β on niisugune nurk, et $\operatorname{tg} \beta = a/b$, a, b - ellipsi poolteljed.

Siis on Stokes'i parameetrid

$$\begin{aligned}I &= [\xi^{(0)}]^2 = [\xi_l^{(0)}]^2 + [\xi_r^{(0)}]^2 = I_l + I_r \\ Q &= I_l - I_r = I \cos 2\beta \cos 2\chi \\ U &= (I_l - I_r) \tan 2\chi = I \cos 2\beta \sin 2\chi \\ V &= (I_l - I_r) \tan 2\beta \sec 2\chi = I \sin 2\beta,\end{aligned}\tag{3}$$

kus χ - polarisatsioonitasandi kaldenurk,

$$\tan 2\chi = \frac{U}{Q},$$

elliptilisus

$$\sin 2\beta = \frac{V}{\sqrt{(Q^2 + U^2 + V^2)}},$$

intensiivsus

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2.\tag{6}$$

Amplituudi ja sageduse konstantsus tähendab ranget monokromaatsust püsiva intensiivsusega. Üldjuhul

$$\begin{aligned}I &= \langle E_{\parallel} E_{\parallel}^* + E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle \\ Q &= \langle E_{\parallel} E_{\parallel}^* - E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle \\ U &= \langle E_{\parallel} E_{\perp}^* + E_{\perp} E_{\parallel}^* \rangle \\ V &= i \langle E_{\parallel} E_{\perp}^* - E_{\perp} E_{\parallel}^* \rangle,\end{aligned}\tag{7}$$

kus $\langle \rangle$ on keskmistamine ajas, $t \gg T$.

Valemist (7) järeldub üldjuhul, et

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2.\tag{8}$$

Võrdus kehtib polariseeritud kiirguse korral, polariseerimata (loodusliku) kiirguse korral

$$Q = U = V = 0.\tag{9}$$

Polarisatsiooniaste

$$\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}/I,$$

lineaarse polarisatsiooni aste

$$\sqrt{Q^2 + U^2}/I,$$

ringpolarisatsiooni aste

$$V/I.$$

2 Levivõrrand

2.1 Levivõrrandi tuletamine

Vainikko, 1990, §2.1; Smelov, 1978, §8

Vaatleme suunas Ω intensiivsusega $I(r, \Omega)$ levivat kiirgust, mis läbib pinnaelemendi dS , r - kohavektor. Ruuminurka $d\Omega$ levib siis energiavoog $I(r, \Omega) dS d\Omega$.

Teepikkuse ds läbimisel

- keskkond neelab ja hajutab energia $I(r, \Omega) dS d\Omega \sigma_e ds$, kus σ_e on nõrgenemiskoeffitsient
- teistest suundadest saabub kiirgust, mis pärast silindris $dS ds$ hajumist levib suunda $d\Omega$,

$$\sigma ds \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} g(r, \Omega', \Omega) I(r, \Omega') d\Omega' dS d\Omega,$$

kus g - faasifunktsioon, σ - hajumiskoeffitsient

- keskkond ise kiirgab suunas Ω (omakiirgus), $J(r, \Omega) ds dS d\Omega$.

Energia jäävuse põhjal koostame bilansivõrrandi

$$\begin{aligned} [I(r + ds, \Omega) - I(r, \Omega)] dS d\Omega &= -\sigma_e ds I(r, \Omega) dS d\Omega + \\ + \sigma ds \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} g(r, \Omega', \Omega) I(r, \Omega') d\Omega' dS d\Omega &+ J(r, \Omega) ds dS d\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Jagame võrduse läbi $ds dS d\Omega$ -ga, siis

$$\begin{aligned} \frac{[I(r + ds, \Omega) - I(r, \Omega)]}{ds} + \sigma_e I(r, \Omega) &= \\ = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} g(r, \Omega', \Omega) I(r, \Omega') d\Omega' &+ J(r, \Omega). \end{aligned} \quad (1a)$$

Minnes piirile $ds \rightarrow 0$ saame intensiivsuse $I(r, \Omega)$ tuletise suunas Ω , sest

$$\lim_{ds \rightarrow 0} \frac{1}{ds} [I(r + ds, \Omega) - I(r, \Omega)] = \sum_{j=1}^3 \Omega_j \frac{\partial I(r, \Omega)}{\partial x_j}.$$

Seega rahuldab kiirguse intensiivsus $I(r, \Omega)$ Boltzmanni integro-diferentsiaalvõrrandit

$$\sum_{j=1}^3 \Omega_j \frac{\partial I(r, \Omega)}{\partial x_j} + \sigma_e I(r, \Omega) = \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} g(r, \Omega', \Omega) I(r, \Omega') d\Omega' + J(r, \Omega). \quad (1b)$$

See võrrand kirjeldab

- difusiooni,
- kiirguslevi,
- neutronite levi.

Põhiprintsiibiks on energia jäävus ja energiabilanss ruumielemendis $dV = dS ds$.

Levivõrrand on lokaalne energiabilansi võrrand.

Kõige üldisemal kujul

$$dI/ds = -\chi \rho I + j \rho \quad (1c)$$

nõrgenemine juurdetulek

ρ - aine tihedus

χ - nõrgenemiskoeffitsient, mis arvestab nii hajumist kui neeldumist

j - kiirguskoeffitsient – see võib sisaldada nii hajumist kui omakiirgust.

Võrrand (1) on lokaalne kiirgusvälja iseloomustaja. Paljudes keskkondades (eriti lõpliku suurusega elementide korral nagu taimkattes) olenevad koeffitsiendid χ ja j keskkonna struktuurist / omadustest eemalasuvates ruumpunktides.

Erilist kohta kiirguslevis omab statsionaarne ülesanne:

– valguse levik, kui intensiivsuse muutused ajas on aeglased võrreldes keskkonnas edasiliikumiseks kuluva ajaga.

Neutronite levi (difusiooni) korral on võimalik, et interaktsiooni tulemusena muutub liikumiskiirus. Valguse korral oleks see võrreldav lainepikkuse muutustega.

2.2 Mittestatsionaarne kiirguslevi

Kui levi on statsionaarne, siis $v = \text{const}$ ja neutronite voo tihedus on nV , kus

$$n(x, y, z, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{F(V, t)}{V},$$

$F(V, t)$ - neutronite arv ruumis V .

Kui $v \neq \text{const}$, laiendame faasitiheduse definitsiooni

$$\lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{F(\Delta V, \Delta v, \Delta \Omega, t)}{\Delta V \Delta v \Delta \Omega} = n(r, v, \Omega, t),$$

kus $\Delta G = \Delta V \Delta v \Delta \Omega$ on faasiruumi element.

Neutronite voo faasitihedus

$$\varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) = v n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t).$$

Defineerime neutronite 'kimbu' $(\Delta v \Delta \Omega)_{v, \vec{\Omega}}$, kus $(\Delta v \Delta \Omega)$ on faasiruumi element.

Kimburst lahkub Δt jooksul

$$\Delta v \Delta \Omega \Delta t \int_V [\varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t) (\sum_a + \sum_s) + \Omega \nabla \varphi(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)] dV$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

Kimpu saavad neutronid teisest kimburst $(\Delta v' \Delta \Omega')_{v', \vec{\Omega}'}$, kus toimus hajumine kiiruse muutusega $v' \rightarrow v$ ja suuna muutusega $\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}$, s.t. faasifunktsioonis lisanduvad argumendid v ja v' , ja allikfunktsioon saadakse integreerides üle kõigi suundade ja kõigi kiiruste.

2.3 Rajatingimused

Võrrand (1) on diferentsiaalvõrrand üldkujuga

$$dy/dx + Py = Q, \quad (2)$$

mille üldlahendiks on

$$I(s) = c e^{-\tau} + e^{-\tau} \int Q(s_1) e^{\tau_1} ds_1, \quad (3)$$

kus

$$\tau = \int \rho \chi ds \quad (4)$$

on optiline teepikkus, c - integreerimiskonstant,

$$Q(\vec{\Omega}) = \frac{\rho \sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} g(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') I(\vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + \epsilon(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (5)$$

σ_s - hajumiskoeffitsient,

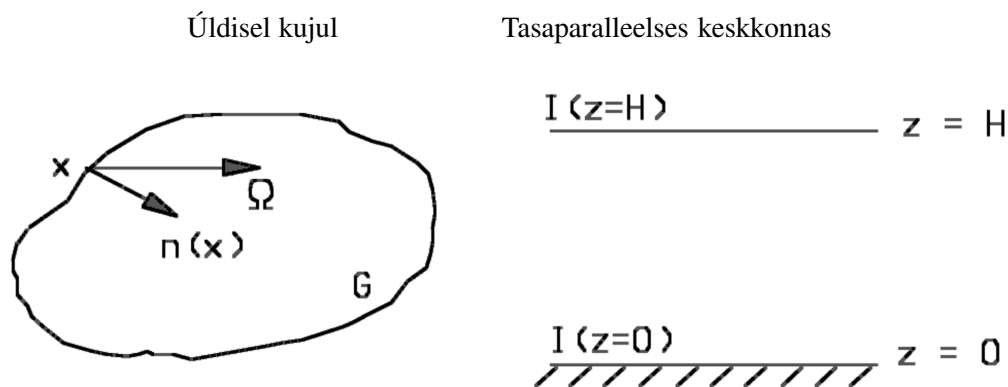
ρ - keskkonna tihedus,

$\vec{\Omega}$ - suunavektor,

$g(\)$ - faasifunktsioon,

$\epsilon(\)$ - allikfunktsioon.

Integreerimiskordaja määramiseks tuleb anda mingid lisatingimused. Kõige loomulikum on anda need tingimused keskkonna äärel, siit ka nimetus rajatingimused, ääretingimused.



Joonis 2.1. Rajatingimused levivõrrandile.

Statsionaarne ülesanne tasaparalleelses keskkonnas

$$\mu \frac{\partial I(z, \Omega)}{\partial z} + \sigma(z) I(z, \Omega) = \frac{\sigma_s(z)}{4\pi} \int_{4\pi} g(z, \Omega, \Omega') I(z, \Omega') d\Omega', \quad (6)$$

või kasutades optilist teepikkust

$$\tau = \int_0^z \sigma(z') dz',$$

siis (6) \Rightarrow

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \Omega)}{\partial \tau} + I(\tau, \Omega) = \frac{\lambda(\tau)}{4\pi} \int_{4\pi} g(\tau, \Omega, \Omega') I(\tau, \Omega') d\Omega', \quad (7)$$

$$0 < \tau < b$$

$$b = \int_0^H \sigma(z') dz' \quad - \text{kihi optiline paksus} \quad (8)$$

$$\lambda(\tau) = \frac{\sigma_s}{\sigma_a + \sigma_s} \leq 1 \quad - \text{footoni ellujäämise tõenäosus} \quad (9)$$

(ühekordse hajumise albeedo)



$\mu = \cos \theta$, θ - seniitnurk.

Joonis 2.2. Polaarnurga arvestamine.

Rajatingimused

$$I(0, \Omega) = I_0(\Omega), \quad \mu > 0$$

$$I(b, \Omega) = I_b(\Omega), \quad \mu < 0. \quad (10)$$

2.4 Levivõrrandi integraalkuju

Lähtume üldlahendist (3), (5). Lisame rajatingimused, et $\vec{r} = \vec{r}_0$ korral on difuusne kiirgus $I_d = 0$ (\vec{r} - kohavektor, \vec{r}_0 - keskkonda V sisenemise punkt). Kogu intensiivsus on $I_i(\vec{r}_0, \vec{\Omega})$.

Mõõdame kaugust $s = |\vec{s}|$ punktist \vec{r}_0 , siis

$$I(\vec{r}, \vec{\Omega}) = I_{ri}(\vec{r}, \vec{\Omega}) + I_d(\vec{r}, \vec{\Omega}),$$

$$I_{ri}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = I_i(\vec{r}_0, \vec{\Omega}) \exp(-\tau),$$

NB! $\vec{s} = \vec{\Omega} s$

$$I_d(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^s \exp[-(\tau - \tau_1)] \left[\frac{\rho \sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} g(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') I(\vec{r}_1, \vec{\Omega}') d\Omega' \right] ds_1 \quad (11)$$

Valem (11) on integraalvõrrand intensiivsuse $I(\vec{r}, \vec{\Omega})$ leidmiseks. Liikmes $I(\vec{r}_1, \vec{\Omega}')$ on ilmutamata kujul sees integreerimine üle kogu ruumi V .

2.5 Levivõrrandi erijuhud

Levivõrrand üldjuhul

$$dI/ds = -\alpha I + \epsilon \quad (1)$$

α – nõrgenemiskoeffitsient

ϵ – kiirguskoeffitsient

A. Vaakum

$$\alpha = \chi \rho$$

$$\epsilon = j \rho$$

Vaakumis $\rho = 0 \Rightarrow \alpha = \epsilon = 0$,
siis

$$dI/ds = 0, \quad I = \text{const} \quad (12)$$

B. Ainult neeldumine, allikad puuduvad

$$\begin{aligned} dI/ds &= -\alpha I \\ dI/I &= -\alpha ds, \quad I = I_0 \exp(-\alpha s) \end{aligned} \quad (13)$$

I_0 määratakse rajatingimusest.

C. Ühekordne hajumine

Kui nõrgenemiskoeffitsientis domineerib neeldumine ja keskkond on hõre, siis võib sageli piirduda ühekordse hajumise arvestamisega, $I(\vec{r}, \vec{s}) = I_{ri}(\vec{r}, \vec{s}) + I_d(\vec{r}, \vec{s})$

$$I_d(\vec{r}, \vec{s}) = \int_0^S \exp[-(\tau - \tau_1)] \left[\frac{\rho \sigma_t}{4\pi} \int_{4\pi} p(\vec{s}, \vec{s}') I_{ri}(\vec{r}_i, \vec{s}') d\omega' + \epsilon(\vec{r}_1, \vec{s}) \right] ds_1 \quad (14)$$

I_{ri} nõrgeneb Bouguer'i seaduse järgi (valem (13)), \vec{r} - kohavektor, \vec{s} loetakse keskkonda sisenemise punktist, $p(\vec{s}, \vec{s}')$ – faasifunktsioon, ϵ – omakiirgus.

D. Tasaparalleelne atmosfäär; neeldumine ja hajumine.

(Sobolev, 1972; ptk. I, §3)

Võtame sõltumatuks koordinaadiks sügavuse z ,

$$ds = dz/\mu, \quad \mu = \cos \theta$$

või optilise sügavuse

$$\tau = \int_z^\infty \alpha(z) dz,$$

siis levivõrrand

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = -I + B, \quad \text{kus } B = \frac{\epsilon}{\alpha} = \lambda \int I p(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (15)$$

Siin on

- λ – footoni ellujäämise tõenäosus,
- $p(\gamma)$ – faasifunktsioon,
- γ – hajumisnurk,
- α – nõrgenemiskoeffitsient

Kui eraldada Päikese otsene kiirgus (planeetide atmosfääris on see mõistlik), siis

$$B \rightarrow \lambda \int I p(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi} + B_1, \quad (15a)$$

kus $B_1 = \frac{\lambda}{4} S p(\gamma) e^{-\tau/\mu_0}$

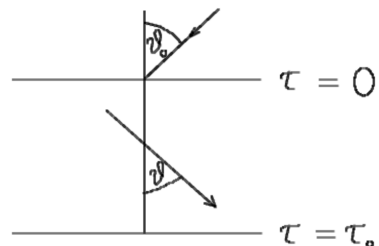
πS - otsese kiirguse voog atmosfääri ülapiiril,

I - difuusse kiirguse intensiivsus.

Rajatingimused

$$\begin{aligned} I(0, \theta, \theta_0, \phi) &= 0 \quad \theta < \pi/2 \\ I(\tau_0, \theta, \theta_0, \phi) &= 0 \quad \theta > \pi/2 \end{aligned} \quad (16)$$

Valemite komplekt (15), (15a) & (16) tähendab sisuliselt lõpliku paksusega tasaparalleelset keskkonda tühjas ruumis või mustal aluspinnal.



Joonis 2.3. Kiirguslevi tasa-paralleelses atmosfääris.

E. Konservatiivne keskkond

Konservatiivses keskkonnas neeldumine puudub, s.t. $\lambda = 1$, siis (15), (15a) võtab kuju

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = -I + \int I p(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi} + \frac{S}{4} p(\gamma) e^{-\tau/\mu_0}. \quad (17)$$

Leiame kogu voo

$$H = \int_{4\pi} I \mu d\omega, \quad (18)$$

selleks korrutame (17) $d\omega$ -ga, integreerime üle kõigi suundade ja kasutame faasifunktsiooni normeerimistingimust

$$\int p(\theta) \frac{d\omega}{4\pi} = 1. \quad (19)$$

Siis

$$\frac{dH}{d\tau} = \pi S e^{-\tau/\mu_0} \quad (20)$$

ja integreerides (20)

$$\begin{aligned} H(\tau, \mu_0) &+ \pi S \mu_0 e^{-\tau/\mu_0} = \text{const} \\ \text{difuusse} &\quad \text{otsese} \\ \text{kiirguse} &\quad \text{kiirguse} \\ \text{voog} &\quad \text{voog} \end{aligned} \quad (21)$$

Valemist (21) järeldub, et voog on konservatiivses keskkonnas konstantne.

Korrutame valemi (17) $\mu d\omega$ -ga ja integreerime üle kõigi suundade, saame

$$\frac{dK}{d\tau} = -(1 - \frac{p_1}{3}) H + \frac{p_1}{3} \pi S \mu_0 e^{-\tau/\mu_0}, \quad (22)$$

kus

$$K = \int I \mu^2 d\omega = 2\pi \int_{-1}^1 I^0(\tau, \mu, \mu_0) \mu^2 d\mu, \quad (23)$$

I^0 on asimuudi järgi keskmistatud $I()$,

$$p_1 = \frac{3}{2} \int_0^\pi p(\gamma) \cos \gamma \sin \gamma d\gamma. \quad (24)$$

Asendades (22)-s H (21)-st ja integreerides τ järgi, saame

$$K(\tau, \mu_0) = -(1 - \frac{p_1}{3}) C \tau - \pi S \mu_2 e^{-\tau/\mu_0} + C_1, \quad (25)$$

kus C_1 on uus integreerimiskonstant.

Integraali (25) tuntakse kui K - integraali.

Radadel $\tau = 0$ ja $\tau = \tau_0$ saame valemist (21)

$$\begin{aligned} -E(0, \mu_0) + \pi S \mu_0 &= C \\ E(\tau_0, \mu_0) + \pi S \mu_0 e^{-\tau_0/\mu_0} &= C, \end{aligned} \quad (26)$$

kus

$$E(0, \mu_0) = -H(0, \mu_0) = 2\pi \int_0^1 I^0(0, \mu, \mu_0) \mu d\mu$$

on voog ülapiiril üles ja

$$E(\tau_0, \mu_0) = H(\tau_0, \mu_0) = 2\pi \int_0^1 I^0(\tau_0, \mu, \mu_0) \mu d\mu$$

on voog alumisel piiril alla. $I^0()$ on üle asimuudi keskmistatud difuusse kiirguse intensiivsus.

Valemist (26) saame

$$E(0, \mu_0) + E(\tau_0, \mu_0) = \pi S \mu_0 (1 - e^{-\tau_0/\mu_0}), \quad (27)$$

s.t. kogu konservatiivse keskkonna ($\lambda = 1$) kihis ära kadunud otsene kiirgus väljub kihist difuussete voogudena läbi üla- ja alapinna.

F. Poollõpmatu atmosfäär. Sügavusrežiim

Poollõpmatus atmosfääris on optiline sügavus $\tau_0 = \infty$.

Lahend $\tau_0 = \infty$ korral määrab ära asümptoodi. Selle lahendi kaudu avaldub sageli ka lahend lõpliku τ korral.

Kiirgusrežiimi iseärasused sügaval:

- otsese kiirguse osakaal on tühine
- intensiivsus ei olene asimuudist
- intensiivsuse nurkolenevus ei olene sügavusest.

Niisugusel juhul piirdume ainult üle asimuudi keskmistatud intensiivsuste analüüsiga,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^0(\tau, \mu, \mu_0)}{d\tau} &= -I^0(\tau, \mu, \mu_0) + B^0(\tau, \mu, \mu_0), \\ B^0(\tau, \mu, \mu_0) &= \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 p^0(\mu, \mu') I^0(\tau, \mu', \mu_0) d\mu', \end{aligned} \quad (28)$$

kus $p^0(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) d\phi$ on üle asimuudi keskmistatud faasifunktsioon.

Poollõpmatu atmosfääri sügavates kihtides võib eeldada, et atmosfäär ulatub kummaski suunas (alla, üles) praktilisse lõpmatusse. Siis võime lahendit otsida kujul

$$\begin{aligned} B^0(\tau, \mu, \mu_0) &= S c(\mu_0) b(\mu) e^{-k\tau} \\ I^0(\tau, \mu, \mu_0) &= S c(\mu_0) i(\mu) e^{-k\tau}, \end{aligned} \quad (29)$$

kus c, b, i on tundmatud funktsioonid, k – tundmatu konstant.

Asendades (29) võrrandite (28) esimesse võrrandisse, saame

$$i(\mu) = \frac{b(\mu)}{1 - k\mu} \quad (30)$$

ja asendades (29) võrrandite (28) teise võrrandisse ning arvestades seost (30), saame

$$b(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p^0(\mu, \mu') \frac{b(\mu')}{1 - k\mu'} d\mu'. \quad (31)$$

Valem (31) on integraalvõrrand $b(\mu)$ leidmiseks, k leitakse võrrandi (31) lahenduvuse tingimusest.

Kui $b(\mu)$ on leitud, siis $i(\mu)$ saame valemist (30). Parameeter k on üldiselt funktsioon footoni ellujäämise tõenäosusest λ .

Sobolev, 1972, ptk. II, §1 leiab võrrandisüsteemi k leidmiseks, kui indikatriss $p(\gamma)$ on ritta arendatud Legendre'i polünoomide järgi,

$$p(\gamma) = \sum_{i=0}^n p_i P_i(\cos \gamma).$$

Võrrandi (31) lahend on määratud konstandi täpsusega, lahend normeeritakse nii, et

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 b(\mu) d\mu = 1. \quad (32)$$

Võrrandi (31) lahendamise lihtsus-keerukus on määratud indikatrissi $p(\gamma)(p^0(\mu, \mu'))$ kujuga.

NB! Funktsiooni $c(\mu_0)$ ei saa määrata süsteemist (28).

a) *Sfääriline indikatriss*

$p(\gamma) = 1$, siis ka $b(\mu) = 1$ ja

$$i(\mu) = \frac{1}{1 - k\mu}. \quad (33)$$

b) *Lõpliku reaga esitatav indikatriss*

Võrrand (31) on suhteliselt lihtsalt lahendatav, kui indikatriss on esitatav lõpliku summaga, näiteks Legendre'i polünoomide järgi arendusena. Sobolev (1972, ptk. II, §1) esitab võrrandi (31) lahendamiskäigu, kui

$$p(\gamma) = 1 + p_1 \cos \gamma,$$

siis

$$b(\mu) = 1 + p_1 b_1 \mu, \quad \text{kus } b_1 = \frac{1 - \lambda}{k}.$$

Pikemate ridade korral õnnestub leida rekurrentsed seosed b_i -de leidmiseks.

Lihtsamad sageli kasutatavad indikatrissid:

c) *Rayleigh indikatriss*

$$p(\gamma) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \gamma) \quad (34)$$

d) *Binomiaalne indikatriss*

$$p(\gamma) = \frac{n+1}{2^n}(1 + \cos \gamma)^n, \quad n - \text{täisarv} \quad (35)$$

e) *Ellipsoidaalne indikatriss*

$$p(\gamma) = \frac{2b}{\ln \frac{1+b}{1-b}} \cdot \frac{1}{1 - b \cos \gamma} \quad (36)$$

f) *Henyey-Greensteini indikatriss,*

see on sageli kasutusel atmosfäärifüüsikas

$$p(\gamma) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (37)$$

g - asümmeetria parameeter.

Sügavusrežiimi saabumise piir

Põhikriteeriumiks on heleduse nurkjaotuse ('heleduse keha') muutumus τ kasvades. Sügavusrežiimi piir on indikatrissi kujust ja valgustustingimustest. $\tau = 20$ on enamusel juhtudel sügavusrežiim, $\tau = 10$ enamasti veel ei ole.

Nõrgenemiskoeffitsient k sügavusrežiimis erineb otsese kiirguse nõrgenemiskoeffitsiendist. Joonis 2.4 esitab intensiivsuse funktsioonina optilisest sügavusest logaritmilises teljestikus.

Lihtsamate indikatrisside jaoks on leitav võrrand nõrgenemiskoeffitsiendi k (valemis (29)) leidmiseks, vt. Sobolev, 1972, ptk. II, §1.

Sfääriline indikatriss

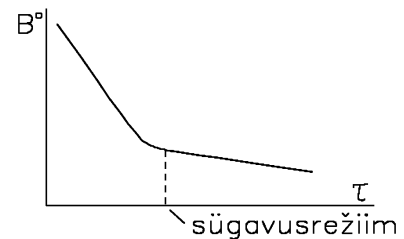
$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1. \quad (38)$$

Rayleigh'i indikatrissi korral peab valem (38) samuti üsna hästi paika.

Juba lihtsaima mittersfäärilise indikatrissi $p(\gamma) = 1 + p_1 \cos \theta$ korral läheb λ ja k vaheline seos keeruliseks (valem (2.18) Sobolev, 1972-s).

Kui faasifunktsioon on esitatav lõpliku reaga Legendre'i polünoomide järgi, saab leida rekurrentsed seosed k arvutamiseks. Kirjandusest võib leida k tabuleeritud väärtusi funktsioonina lainepikkusest λ . Väikese neeldumise korral on sageli kasutatav lähend

$$k = \sqrt{(1 - \lambda)(3 - p_1)}. \quad (39)$$



Joonis 2.4. Sügavusrežiimi saabumise piir

G. Peegeldumine poollõpmatult atmosfäärilt

Aluspind on lõpmatu optilise paksuse taga, seega heleduse nurkjaotus ei olene aluspinnast ja määratakse ainult faasifunktsiooni ning footoni elueaga ning valgustamise iseärasustega.

Esitades faasifunktsiooni Legendre'i polünoomide järgi arendusena

$$p(\gamma) = \sum p_i P_i(\cos \gamma),$$

saab levivõrrandi lahendit otsida samuti summana

$$B = B^0 + 2 \sum_{m=1}^n B^m \cos m \phi,$$

$$I = I^0 + 2 \sum_{m=1}^n I^m \cos m \phi,$$

ϕ on asimuut. Iga komponendi I^i, B^i jaoks kehtib võrrandi (1) vastav kuju samadel rajatingimustel. Siin on kõik B -d ja I -d funktsioonid mõlemast nadiirnurgast μ ja μ' ning optilisest paksusest τ , $I = I(\mu, \mu', \tau)$, $B = B(\mu, \mu', \tau)$.

Peegelduskoeffitsiendi saab esitada reana abifunktsioonide $\varphi_i^m(\mu)$ kaudu,

$$\rho^m(\mu, \mu') = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=m}^n C_i^m (-1)^{i+m} \frac{\varphi_i^m(\mu) \varphi_i^m(\mu')}{\mu + \mu'}. \quad (40)$$

C_i^m – kombinatsioonid. Siin on võrrand (1) normeeritud peegelduskoeffitsiendiks ja lahendit on otsitud sümmeetrilisel kujul, et oleks täidetud Helmholtzi printsiip (reciprocity relation).

Abifunktsioonid φ_i^m (Ambartsumjani funktsioonid) on määratud lineaarsete integraalvõrrandite süsteemiga

$$\varphi_i^m(\mu_1) = P_i^m(\mu_1) + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=m}^n c_j^m (-1)^{i+j} \varphi_j^m(\mu_1) \int_0^1 \frac{P_i^m(\mu_2) \varphi_j^m(\mu_2) d\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (41)$$

kus $P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ on Legendre'i kaasfunktsioonid,

$$c_i^m = p_i \frac{(i - m)!}{(i + m)!}.$$

Sfäärilise indikatrissi korral ($p(\gamma) = 1$)

$$\rho(\mu, \mu') = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\mu) \varphi(\mu')}{\mu + \mu'}, \quad (42)$$

kus $\varphi(\mu) = \varphi_0^0(\mu)$ leitakse integraalvõrrandist

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{2} \mu \varphi(\mu) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu')}{(\mu + \mu')} d\mu'. \quad (43)$$

Keerulisemate indikatrisside korral saab süsteemist (41) rekurrentsed võrrandid teiste $\varphi_i^j(\mu)$ leidmiseks.

Energeetika seisukohalt pakub sageli suuremat huvi albeedo

$$A(\mu) = 2 \int_0^1 \rho^0(\mu, \mu') \mu d\mu' \quad (44)$$

Sobolev, 1972, ptk. II, §2 esitab Ambartsumjani funktsioonide definitsioonivalemi. Sealt järeldeb otseselt, et

$$A(\mu) = 1 - \frac{1}{\mu} \varphi_1^0(\mu)$$

ja kogu planeedi sfääriline albeedo

$$A_s = 1 - 2 \int_0^1 \varphi_1^0(\mu) d\mu.$$

H. Poollõpmatu atmosfääri läbilase. Invariantsprintsiiip

Väga paksu hajutavat kihti läbinud kiirguse nurkjaotus on nurkjaotus sügavusrežiimis. Seega võib lahendit otsida samal viisil kui sügavusrežiimi intensiivsusi. Sama probleem esineb, kui kiirgusallikas on sügaval keskkonna sees ja on vaja leida väljuv kiirgus (Milne'i ülesanne täheatmosfääride uurimisel).

Teine võimalus läbitulnud kiirgusvälja leidmiseks on kasutades Ambartsumjani invariantsprintsiiipi.

Tähistame kihist τ läbi tulnud kiirguse intensiivsuse nurkjaotuse $u(\mu)$ (intensiivsus on asimuudist sõltumatu suure τ korral). Kui kihile τ lisada alla õhuke kiht $\Delta\tau$, siis sügavusrežiimis nurkjaotus ei muutu, muutub ainult intensiivsuse absoluutväärtus:

a) läbitulnud kiirgus nõrgeneb

$$u(\mu) \rightarrow u(\mu) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\mu}\right),$$

b) lisandub kihis $\Delta\tau$ hajunud kiirgus

$$\frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\tau}{\mu} \int_0^1 u(\mu') p(\mu, \mu') d\mu',$$

kus $p(\mu, \mu')$ on üle asimuudi keskmistatud faasifunktsioon.

c) kiht $\Delta\tau$ hajutab kiirgust tagasi eelmise kihi τ suunas, kust see peegeldub difuusselt suunas μ

$$\lambda \Delta\tau \int_0^1 \rho(\mu, \mu'') d\mu'' \int_0^1 u(\mu') p(-\mu'', \mu') d\mu'.$$

Nende kolme liikme summa annab kihist $\tau + \Delta\tau$ läbi tulnud intensiivsuse. Teiselt poolt, kihist $\tau + \Delta\tau$ läbi tulnud kiirgus on $u(\mu)(1 - k \Delta\tau)$ (kus k on const), sest intensiivsuse nurkjaotus kihi $\Delta\tau$ lisamisega ei muutu,

$$\begin{aligned} u(\mu) (1 - k \Delta\tau) &= u(\mu) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\mu}\right) + \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\tau}{\mu} \int_0^1 u(\mu') p(\mu, \mu') d\mu' + \\ &+ \lambda \Delta\tau \int_0^1 \rho(\mu, \mu'') d\mu'' \int_0^1 u(\mu') p(-\mu'', \mu') d\mu'. \end{aligned}$$

Lihtsate teisendustega saame

$$u(\mu)(1 - k\mu) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 u(\mu') K(\mu, \mu') d\mu', \quad (45)$$

kus

$$K(\mu, \mu') = p(\mu, \mu') + 2\mu \int_0^1 \rho(\mu, \mu'') p(-\mu'', \mu') d\mu''.$$

Konstant k määratakse võrandi (45) lahenduvuse tingimusest. Sobolev, 1972, ptk. II, §3 esitab $u(\mu)$ Ambartsumjani funktsioonide $\varphi_i(\mu)$ kaudu,

$$u(\mu) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^n \frac{P_i a_1 \varphi_i(\mu)}{1 - k\mu}, \quad (46)$$

kus $a_i = \int_0^1 u(\mu) P_i(\mu) d\mu$. See võrandite paar defineerib algebraaliste võrandite süsteemi a_i -de leidmiseks, mille lahenduvustingimus määrab konstandi k . Läbilaskefunktsioon $u(\mu)$ määrab ära ka ptk. 2.5.F kasutusele võetud funktsiooni $c(\mu)$, vt. Sobolev, 1972, ptk. II, §4:

läheldes integraalvõrrandist $B(\tau, \mu_1, \mu_2)$ jaoks jõuab Sobolev pärast mõnesid teisendusi $c(\mu)$ jaoks integraalvõrrandini

$$c(\mu)(1 - k\mu) = \mu \frac{\lambda}{2} \int_0^1 c(\mu') K(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'},$$

s.t.

$$c(\mu) = C u(\mu) \mu, \quad (47)$$

kus C on konstant.

Näeme, et nii paksult kihilt peegeldunud kui ka kihist läbi tulnud kiirguse nurkjaotus on täielikult avaldatav võrrandiga (43) määratud Ambartsumjani funktsioonide kaudu.

I. Lõpliku optilise paksusega atmosfäär

Kasutades faasifunktsiooni arendust Legendre'i polünoomide järgi, saame integraalvõrrandid, mis seovad peegeldumiskoeffitsiendi ρ^m ja läbilaskekoefitsiendi σ^m allikfunktsiooniga B^m .

Need võrrandid saab viia seosteni, kus ρ^m ja σ^m avalduvad abifunktsioonide (Ambartsumjani funktsioonide) φ_i^m ja ψ_i^m kaudu. Sfäärilise indikatriisi korral

$$\varphi(\mu, \tau) = 1 + \frac{\lambda}{2} \mu \int_0^1 \frac{\varphi' \varphi - \psi' \psi}{\mu + \mu'} d\mu', \quad (48)$$

$$\psi(\mu, \tau) = e^{-\tau/\mu} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi \psi' - \varphi' \psi}{\mu' - \mu} d\mu',$$

kus $\varphi = \varphi(\mu, \tau)$, $\varphi' = \varphi(\mu', \tau)$, $\psi = \psi(\mu, \tau)$, $\psi' = \psi(\mu', \tau)$. Kui faasifunktsiooni esitamiseks on vaja rittaarendusi, siis on võrandite (48) paremal poolel vastavad summad. Lahendamine läheb keeruliseks, kui $\tau \gg 1$. Huvi pakub asümptootika $\tau \gg 1$ – siis on tegemist sügavusrežiimiga ja pole vaja arvestada olenevust asimuudist.

Lähtume poollõpmatust atmosfäärist, asetades tasandi sügavusele τ . Siis valgustatakse kihti paksusega τ ülalt vooga πS suunast μ' ja alt difuusse vooga poollõpmatu atmosfääri sügavusrežiimi ptk. 2.5.F

valemi (29) järgi,

$$\rho(\mu, \mu') = \rho(\mu, \mu', \tau) + 2u(\mu') e^{-k\tau} \int_0^1 \sigma(\mu, \mu'', \tau) i(-\mu'') \mu'' d\mu'', \quad (49)$$

$$u(\mu') i(\mu) e^{-k\tau} = \sigma(\mu, \mu', \tau) + 2u(\mu') e^{-k\tau} \int_0^1 \rho(\mu, \mu'', \tau) i(-\mu'') \mu'' d\mu'',$$

$\rho()$ – peegeldumiskoeffitsient, $\sigma()$ – läbilaskekoefitsient.

Siin on vasakul poollõpmatu atmosfääri peegeldumine ja läbilase ning paremal on see lahutatud kaheks: kiht τ ja selle all olev poollõpmatu kiht.

Korrutades (49) $i(-\mu)\mu$ -ga, integreerides 0...1 ja kasutades $\rho(\mu, \mu', \tau)$ sümmeetrilisust μ, μ' suhtes, saame

$$\rho(\mu, \mu', \tau) = \rho(\mu, \mu') - f(\tau) u(\mu) u(\mu'),$$

$$\sigma(\mu, \mu', \tau) = g(\tau) u(\mu) u(\mu'),$$

kus

$$f(\tau) = \frac{M N e^{-2k\tau}}{1 - N^2 e^{-2k\tau}},$$

$$g(\tau) = \frac{M e^{-k\tau}}{1 - N^2 e^{-2k\tau}},$$

(50)

$$M = 2 \int_{-1}^1 i^2(\mu) \mu d\mu,$$

$$N = 2 \int_0^1 u(\mu) i(-\mu) \mu d\mu,$$

k on nõrgenemiskoeffitsient sügavusrežiimis, $u(\mu)$ - poollõpmatust atmosfäärist läbi tulnud kiirguse nurkjaotus, mis on määratud Ambartsumjani funktsioonidega φ_i^j . Valemid (50) on saadud eeldusel, et $\tau \gg 1$. Funktsioonides $g(\tau)$ ja $f(\tau)$ on eksponendis korrutis $k\tau$, seega asümptoodid peegeldumise- ja läbilaskefunktsioonidele on erineva neeldumise korral ($k \gg 1$, $k \ll 1$) erinevad.

J. Atmosfäär peegelduva aluspinna kohal

Planeetide atmosfääril on alati all aluspind, millelt võib tagasi peegelduda oluline osa läbitulnud kiirgusest (lumi 60 – 80%, vesi madala Päikese korral 60 – 90%, hele liiv $\approx 50\%$). Kui Päikese otsene kiirgus πS langeb suunast μ' , siis aluspinna olemasolul valgustatakse kihti τ_0 altpoolt difuusse kiirgusega. Intensiivsuse ja allikfunktsiooni jaoks sügavusel τ kehtib endiselt üldine levivõrrand

$$\bar{B}(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_{-1}^1 \bar{I}(\tau) p(\gamma'') d\mu'' + \frac{\lambda}{4} S p(\gamma') e^{-\tau/\mu'}, \quad (51)$$

kus \bar{I} ja \bar{B} on vastavad funktsioonid aluspinna olemasolu korral, ja ilma üla-kriipsuta – kui aluspinda ei ole.

Teiselt poolt

$$\bar{I}(\tau, \mu, \mu', \varphi, \tau_0) = \int_0^\tau \bar{B}(\tau') e^{-\frac{(\tau-\tau')}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu'},$$

$$\begin{aligned} \bar{I}(\tau, -\mu, \mu', \varphi, \tau_0) &= \int_{\tau}^{\tau_0} \bar{B}(\tau') e^{\frac{-(\tau' - \tau)}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu'} + \\ &+ I_R(\mu, \mu', \varphi, \tau_0) e^{\frac{-(\tau_0 - \tau)}{\mu}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Siin esitab esimene võrrand alla suunatud difuusse kiirguse, teine – üles suunatud, I_R – aluspinnalt peegeldunud kiirguse intensiivsus. Aluspinda valgustavad atmosfäärist läbi tulnud otsene kiirgus $\pi S \mu' e^{-\tau_0/\mu'}$ ja atmosfääri alusmisest pinnast väljuv hajunud kiirgus $\bar{I}(\tau_0)$. Isotroopse aluspinna korral (Lamberti pind)

$$I_R = a [S \mu' e^{-\tau_0/\mu'} + \bar{I}(\tau_0)]. \quad (53)$$

Kasutades võrrandeid (52) ja (53) saame (51)-st integraalvõrrandi $\bar{B}(\tau)$ jaoks aluspinnaga atmosfääris. Üldjuhul ei ole (53)-s a konstant, vaid funktsioon valgustus- ja vaatesuunast.

Keeruliste indikatrisside $p(\gamma)$ ja $a(\mu, \mu', \phi)$ korral võib jällegi kasutada rittaarendusi Legendre'i polünoomide järgi. Siis saame integraalvõrrandite süsteemi, mis seob \bar{B}^m , \bar{I}^m , p_m ja a_m , $m = 0, 1, 2, \dots$.

Isotroopse aluspinna korral on $a()$ rittaarenduses ainult liige $m = 0$ ning I_R -ga liige tuleb ainult võrrandis $m = 0$.

Kasutame tähistusi

$$\begin{aligned} A(\mu', \tau) &= 2 \int_0^1 \rho(\mu, \mu', \tau) \mu d\mu, \\ V(\mu', \tau) &= 2 \int_0^1 \sigma(\mu, \mu', \tau) \mu d\mu + e^{-\tau_0/\mu'} \\ A_s(\tau) &= 2 \int_0^1 A(\mu') \mu' d\mu'. \end{aligned} \quad (54)$$

NB!

Sobolev 1972, lk. 117 on viga, valem (29)-s integraali all peaks olema $A(\xi, \tau_0)$!

Tähistused (54) on ilma aluspinnata atmosfääri albeedo A , sfääriline albeedo A_s ja läbilaskekoefitsient V . Siis

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\tau) &= \rho(\tau) + \frac{a V(\mu, \tau) V(\mu', \tau)}{1 - a A_s(\tau)}, \\ \bar{\sigma}(\tau) &= \sigma(\tau) + \frac{a A(\mu, \tau) V(\mu', \tau)}{1 - a A_s(\tau)}. \end{aligned} \quad (55)$$

Siin on ρ , $\bar{\rho}$, σ , $\bar{\sigma}$ funktsioonid ka μ , μ' -st. Seega, aluspinnaga atmosfääri läbilaske- ja peegeldus-funktsioonid avalduvad ilma aluspinnata atmosfääri peegeldus- ja läbilaskefunktsioonide kaudu. Valemite (55) tuletuskäiku vt. Sobolev, 1972, ptk. IV, §§1, 2.

K. Sfääriline atmosfäär

Sobolev 1972, ptk. XI

Seni oli kogu teooria esitatud tasaparalleelse atmosfääri jaoks. Planeetide atmosfäär on õhukese kihina ümber sfäärilise planeedi. See tekitab olulisi iseärasusi atmosfääri kiirgusrežiimis, eriti terminaatori lähedal.

Vaatleme planeeti raadiusega R , mida valgustatakse paralleelse Päikese kiirte vooga πS . Olgu atmosfääris hajumine isotroopne. Niisuguses atmosfääris on integraalvõrrand allikfunktsiooni $B(r, \theta)$ jaoks

$$B(r, \theta) = \frac{\lambda}{2} \int_R^\infty \alpha(r') r'^2 dr' \int_0^\pi B(r', \theta') K(r, r', \theta, \theta') \sin \theta' d\theta' + B_1(r, \theta), \quad (56)$$

kus $\alpha(r)$ – ruumneeldumiskoeffitsient,
 αB_1 – esimest järku hajumise kiirguskoeffitsient,

$$B_1(r, \theta) = \frac{\lambda}{4} S e^{-T(r, \theta)}, \quad (57)$$

T – optiline teepikkus hajumistsentrist Päikeseni,

$$T(r, \theta) = \int_z^\infty \alpha(r') dr',$$

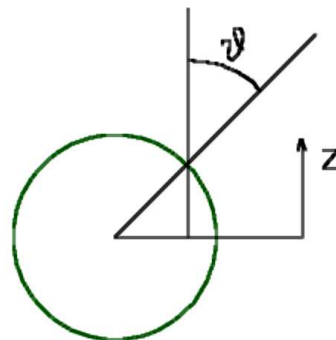
$$z = r \cos \theta,$$

$$r'^2 = r^2 \sin^2 \theta + z'^2,$$

θ – nurk raadiusvektori ja Päikesekiirte vahel,

z – teepikkus piki Päikesekiirte, $z = 0$, kui $\theta = \pi/2$,

λ – ühekordse hajumise albedo.



Joonis 2.5. Koordinaadid sfäärilises atmosfääris.

Võrrandi (56) tuumaks on

$$K(r, r', \theta, \theta') = \frac{1}{2\pi} \int e^{-t(r, r')} \frac{d\theta}{s^2(r, r')}, \quad (58)$$

kus $s(r, r')$ on kaugus punktide (r, θ, ϕ) ja (r', θ', ϕ') vahel ning $t(r, r')$ on optiline kaugus nende punktide vahel. Integreerimispiirkonnaks on kogu punktis (r^E, θ^E, ϕ^E) nähtav atmosfäär.

(NB! Valemis (58) puudub faasifunktsioon, sest eeldasime isotroopset hajumist.)

Võrrand (56) lihtsustub, kui oletada, et atmosfäär koosneb tasaparalleelsetest kihtidest, aga atmosfääri valgustatakse igas punktis nii nagu sfäärilist atmosfääri. Asukohta atmosfääris kirjeldame kõrgusega $h = r - R$ ning x - ja y -koordinaatidega, kusjuures x on seotud ϕ ja R -ga (Maa raadiusega), $x = R\phi$. Viimane seos lubab üle minna ristkoordinaatidele. Koordinaat y vastab Päikesega seotud koordinaatides paralleelile (konstantsele geograafilisele laiuusele), siis ei ole olenevust y -st ja y järgi võib ära integreerida,

$$B = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{\tau_0} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau', x') K(\tau, \tau', x, x') dx' + B_1(\tau, x), \quad (59)$$

kus

$$K(\tau, \tau', x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \frac{dy}{s^2}, \quad (60)$$

optiline kaugus $t = \frac{\tau - \tau'}{h' - h} s$, s - geomeetriline kaugus.

Asendades valemis (60) optilise kauguse ja kasutades tähistust $b^2 = (x - x')^2 + (h - h')^2$, saame

$$K(\tau, \tau', x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\tau - \tau'}{h' - h} \sqrt{b^2 + y^2}} \frac{dy}{b^2 + y^2},$$

või kasutades muutujate vahetust $w = \frac{\sqrt{b^2 + y^2}}{b}$

$$K(\tau, \tau', x, x') = \frac{2}{b} \int_1^\infty e^{-cw} \frac{dw}{w\sqrt{w^2 - 1}} = \frac{2}{b} \int_c^\infty K_0(c) dc, \quad (61)$$

kus $K_0(c)$ on 0-järku Besseli funktsioon imaginaarsest argumentist,

$$c = b \frac{\tau - \tau'}{h' - h},$$

$$K_0(c) = \int_1^\infty e^{-cw} \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 1}}.$$

Ülesande täielikuks lahendamiseks on vaja ette anda seos geomeetriliste koordinaatide ja optilise tiheduse vahel (nõrgenemiskoeffitsiendi olenevus kõrgusest ennekoõige) ning rajatingimused: atmosfääri all on osaliselt peegeldav aluspind.

L. Difusioonivõrrand

Smelov, 1978, §8

Vaatleme keskkonda, kus neeldumine on tühine ja hajumine isotroopne. Arvutame osakeste (neutronite) bilansi horisontaalsel pinnaelemendil ΔS . Eraldame ülemises poolruumis diferentsiaalse ruumala ΔV . Edukas on põrge, mille tulemusel neutron läbib aja $t, t + \Delta t$ jooksul pinna ΔS ülevalt alla. Ruumis ΔV saab edukas põrge aset leida ajal $t', t' + \Delta t$, kus $t' = t - r/v$, r - kaugus ΔS ja ΔV vahel, v - neutroni kiirus.

Δt jooksul hajub ruumalas $\Delta V = \sigma_s \Phi(\vec{r}, t - r/v) \Delta V \Delta t$ neutronit, kus Φ on neutronite voo tihedus, $\Phi = nv$.

ΔS suunas lendavad

$$\frac{\Delta S \cos \theta}{4\pi r^2} \sigma_s \Phi \Delta V \Delta t \exp(-(\sigma_s + \sigma_a) r). \quad (62)$$

Et saada voogu läbi ΔS , tuleb valemit (62) integreerida üle kogu ülemise poolruumi ja jagada $\Delta S \Delta t$ -ga,

$$j_- = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \Phi \exp(-(\sigma_s + \sigma_a) r) \cos \theta \sin \theta. \quad (63)$$

Siin on koordinaatide alguspunkt pinnaelemendil ΔS . Integraali (63) arvutamisel arvestame, et eksponentsiaalne kordaja kahaneb kaugusega kiiresti ja voogu j_- annavad põhipanuse lähedal asuvad ruumi-
elemendid ΔV (kuni 3 footoni vaba tee pikkuse kaugusel). Selles piirkonnas kasutame voo Φ ligikaudset
väärtust – Taylori rea kahte esimest liiget

$$\Phi(\vec{r}, t - r/v) \approx \Phi(\vec{r}, t) = \Phi_0 + x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 + y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 + z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0$$

ja lihtsustust $\sigma_s + \sigma_a \approx \sigma_s$ (neeldumine tühine). Asendame valemis (63) Φ selle rittaarendusega ja integreerime. Integraalid x ja y järgi $\rightarrow 0$,

$$j_- = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{1}{6\sigma_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0 \quad (64)$$

ja samal viisil

$$j_+ = \frac{\Phi_0}{4} - \frac{1}{6\sigma_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0$$

ning kogu voog läbi pinna ΔS

$$j = j_+ - j_- = -\frac{1}{3\sigma_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_0. \quad (65)$$

Sama valem kehtib ka suvalises punktis M suvaliselt orienteeritud pinna ΔS korral

$$j = \frac{1}{3\sigma_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_M = -\frac{1}{3\sigma_s} \vec{n} \cdot \nabla \Phi, \quad (65a)$$

kus \vec{n} on pinna normaal, j on neutronite vektorvoog.

Kasutades neutronite vektorvoo lähendit (65a), koostame neutronite bilansi võrrandi läbi ruumi V ümbritseva pinna S ja Gauss-Ostrogradski valemiga läheme üle ruumintegraalile (vt. Smelov, 1978, §8),

$$\int_V \left[\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} - q(\vec{r}, t) + \sigma_a \Phi(\vec{r}, t) - \nabla \frac{1}{3\sigma_s} \nabla \Phi(\vec{r}, t) \right] dV = 0.$$

Siin on n – neutronite tihedus,

q – allikate erivõimsus.

Kuivõrd ruum V on suvaline, peab nulliga võrduma avaldis integraali all, ja arvestades, et $\Phi = nv$, saame

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla D \nabla \Phi - \sigma_a \Phi + q, \quad (66)$$

kus $D = 1/(3\sigma_s)$ on difusioonikoeffitsient.

Võrrand (66) on *difusioonivõrrand*. Kui difusioonikoeffitsient ei olene asukohast, siis

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \nabla^2 \Phi - \sigma_a \Phi + q, \quad (66a)$$

kus $\Delta = \nabla^2$ on Laplace'i operaator.

Difusioonivõrrand on kasutatav homogeenses väljas. Keskkonna piiril ning tugevate allikate ja neelude läheduses ei ole võrrandi eeldused täidetud.

M. Punktallikas lõpmatus keskkonnas

Lahendame ülesande difusioonivõrrandi abil polaarkoordinaatides. Olgu allikas võimsusega q koordinaadistiku alguspunktis, siis

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} - \kappa^2 \Phi = 0, \quad r \neq 0, \quad (67)$$

kus $\kappa^2 = \frac{\sigma_a}{D} = 3\sigma_a \sigma_s > 0$.

Tähistades $u = \Phi r$, saame

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \kappa^2 u = 0,$$

mille üldlahendiks on

$$u = A \exp(-\kappa r) + B \exp(\kappa r),$$

ja tagasi Φ juurde

$$\Phi(r) = A \frac{\exp(-\kappa r)}{r} + B \frac{\exp(\kappa r)}{r}.$$

Konstandid A ja B leitakse rajatingimustest. Kuivõrd lõpmatuses ei saa voog Φ tõkestamatult kasvada, peab olema $B = 0$. Konstant A leitakse tingimusest

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 j_r = q.$$

Valemist (65a)

$$j_r = -D \frac{d\Phi}{dr} = AD \frac{1 + \kappa_2}{r^2} \exp(-\kappa r),$$

seega

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi D} \frac{\exp(-\kappa r)}{r}. \quad (68)$$

N. Lõpmatu tasapinnaline allikas

Vaatleme isotroopset allikat vootihedusega $q(m^{-2})$, mis on tasandis $z = 0$.

Siis

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \kappa^2 \Phi = 0. \quad (69)$$

Ülesanne on sümmeetriline $z = 0$ suhtes ja ei olene koordinaatidest x ja y .

Üldlahend on

$$\Phi(z) = A \exp(-\kappa z) + B \exp(\kappa z)$$

ja rajatingimusest

$$\Phi(z) \not\rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty$$

järeldub, et $B = 0$ ning rajatingimusest $j_z = q/2$ ($z \rightarrow 0$) saame kordaja

$$A = \frac{q}{2\kappa D},$$

seega lahend

$$\Phi(z) = \frac{q}{2\kappa D} \exp(-\kappa z). \quad (70)$$

3 Levivõrrandi lahendamine

Lenoble (ed.), 1990

Üldjuhul võime levivõrrandi esitada kujul

$$\vec{\Omega} \nabla I(\vec{r}, \vec{\Omega}) = -\sigma_e(\vec{r}) [I(\vec{r}, \vec{\Omega}) - J(\vec{r}, \vec{\Omega})],$$

ja tasaparalleelsel juhul

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} = I(\tau, \mu, \phi) - J(\tau, \mu, \phi), \quad (1)$$

kus allikfunksioon on

$$J = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} p I d\Omega' + J_S \quad (1')$$

hajumine omakiirgus

λ – ühekordse hajumise albeedo,

σ_e – nõrgenemiskoeffitsient,

p – faasifunktsioon.

Rajatingimused

$$I^+(\tau_H), \quad I^-(\tau = 0). \quad (1'')$$

Kui faasifunktsioon on arendatud ritta Legendre'i polünoomide järgi,

$$p(\gamma) = \sum_l^L p_l P_l(\cos \gamma), \quad (2)$$

siis lahutub võrrand (1) võrrandite süsteemiks, võrrandite arv on määratud rittaarenduse pikkusega L . Atmosfäärifüüsikas (gaasilises keskkonnas) on see tavaline ja tõhus meetod. Siis saab lahendi (otsitava intensiivsuse) arendada Fourier' ritta asimuudi järgi, s.t. muutujad (polaarnurk ja asimuut) eralduvad.

Geofüüsikalistes rakendustes ei ole rittaarendus (2) sageli ratsionaalne faasifunktsiooni väljavenitatuse tõttu, võib juhtuda, et $L > 1000$. Niisugusel juhul on efektiivsem mõni teine arendus *à la* transport-lähendis või delta-Eddington meetodis, kus faasifunktsioonis on mingi kaaluga δ -funktsioon $\delta(\gamma)$.

3.1 Eddingtoni meetod

Lenoble, 1990, 4.2;

Sobolev, 1972, ptk. VIII, §4

See meetod baseerub intensiivsuste keskmistamisel üle suundade. Lähtume integraalvõrrandist allik-funktsiooni jaoks

$$B(\tau, \mu, \phi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', \mu, \phi') p(\gamma') d\mu' + \frac{\lambda}{4} S p(\gamma) e^{-\tau/\mu_0}. \quad (3)$$

Eddington kasutas lähendit

$$I(\tau, \mu, \mu', \phi) = I_0(\tau, \mu') + \mu I_1(\tau, \mu'), \quad (4)$$

siis

$$B(\tau, \mu, \mu', \phi) = \lambda \bar{I}(\mu') + \lambda p_1 \bar{H}(\mu') \mu + \\ + \lambda p_1 \bar{G}(\mu') \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi + \frac{\lambda}{4} S p(\gamma) e^{-\tau/\mu'},$$

kus

$$\bar{I}(\tau, \mu') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 I(\mu, \mu', \phi) d\mu \\ \bar{H}(\tau, \mu') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 I(\mu, \mu', \phi) \mu d\mu \\ \bar{G}(\tau, \mu') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 I(\mu, \mu', \phi) \sqrt{1 - \mu^2} d\mu. \quad (5)$$

Siin on p_1 faasifunktsiooni rittaarenduse esimene kordaja.

Arendus (5) on allikfunktsiooni arendus Fourier' ritta, rea liikmete arv on 2. See on samaväärne sellega, et kõrgemat järku hajumises kasutatakse faasifunktsiooni Legendre'i polünoomide järgi rittaarenduse kahte esimest liiget. Rakendades operaatoreid

$$\int_{-1}^1 d\mu \quad ja \quad \int_{-1}^1 \mu d\mu$$

ning kasutades Eddingtoni eeldust (4) saame võrrandi (1) (või (3)) asemele võrrandisüsteemi I_0 ja I_1 leidmiseks.

Sobolev (1972, ptk. VIII, §4) teeb läbi kogu arvutuskäigu I_0 jaoks, vt. ka Joseph, J. H. et al. (1976) ja Shettle, E.P. & Weinman, J.A. (1970).

3.2 Kahe voo lähend

Ishimaru, 1981, ptk. 10

Kui faasifunktsioon on funktsioon ainult hajumisnurga koosinusest, siis (Chandrasekhar, 1960)

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\mu, \mu', \phi) d\phi = \sum_l (2l + 1) g_l P_l(\mu) P_l(\mu'), \quad (6)$$

kus $P_l(\mu)$ on Legendre'i polünoom ja koefitsiendid on

$$g_l = \frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 P_l(\mu) p(\mu, 1) d\mu.$$

Tähistades üle asimuudi integreeritud intensiivsuse

$$I(\tau, \mu) = \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu, \phi) d\phi,$$

saame levivõrrandi (1) integreerimisel üle asimuudi

$$2\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = 2I(\tau, \mu) - \lambda \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' - \pi F p(\mu' - \mu_0) e^{-\tau/\mu_0}. \quad (7)$$

Tuues sisse integraalid üle poolsfääri

$$I^\pm(\tau) = \int_0^1 \mu I(\tau, \pm\mu) d\mu \quad (8)$$

jõuame võrranditeni

$$\begin{aligned}\frac{dI^+}{d\tau} &= \gamma_1 I^+ - \gamma_2 I^- - \pi F \lambda \gamma_3 e^{-\tau/\mu_0} \\ \frac{dI^-}{d\tau} &= \gamma_2 I^+ - \gamma_1 I^- + \pi F \lambda \gamma_4 e^{-\tau/\mu_0}.\end{aligned}\tag{9}$$

Rajatingimused on $I^+(\tau_H) = I^-(0) = 0$ (kui aluspind on must) või $I^+(\tau_H) = 0, I^-(0) = \pi F$.

Üsna põhjalik ülevaade erinevatest kahe voo meetoditest on artiklis Meador & Weaver (1980).

3.3 Monte Carlo meetodid

Arvutis modelleeritakse footoni saatus. Kasutatakse kaalude meetodit, et ei oleks vaja nii palju footoneid. Footonit jälgitakse tavaliselt, kuni kaal kahaneb 10^{-5} -ni.

MC meetodi eri variandid:

- päripidine, keskmistamisega detektoris – keskmistamine üle mingi ruuminurga;
- päripidine diskreetsete nurkadega – nurkade hulk antakse ette;
- tagurpidine diskreetsete nurkadega – footonid stardivad detektorist etteantud diskreetsel nurkade hulgal.

3.4 Diskreetsete ordinaatide meetod

Levivõrrand tasaparalleelsel juhul

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} = I(\tau, \mu, \phi) - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mu, \mu', \phi') I(\mu', \phi') d\Omega' .\tag{1}$$

Kui nurkkoordinaadid μ, ϕ diskretiseerida võrgule $M \times N (M = 2m, N = 2n)$ ja asendada integraal allikfunksioonis integraalsummaga võrgul $M \times N$, saame mittehomogeense esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\mu_i \frac{\partial I(\tau, \Omega_{ij})}{\partial \tau} = I(\tau, \Omega_{ij}) - \frac{\lambda}{4\pi} \sum_j \sum_k p(\mu_i, \mu_j, \phi_k) I(\mu_i, \phi_k) w_j w_k ,\tag{10}$$

kus w_j, w_k on integreerimise kvadratuurvalemi kordajad. Enamasti kasutatakse integraali arvutamiseks võrrandi (1) paremal poolel Gaussi kvadratuurvalemeid. Siis on integreerimissõlmede asukohad ja vastavad kaalud w_j, w_k määratud kvadratuurvalemi järguga. Faasifunktsioon $p(\mu, \mu', \phi')$ asendub sellisel juhul hajumismaatriksiga $p(\mu_i, \mu_j, \phi_k)$.

Kui kvadratuurvalemi järk on 1, siis saame kahe voo lähendi.

Võimalik on kahesugune füüsikaline interpretatsioon:

- ruum on diskreetne, footonid saavad liikuda ainult diskreetsel suundade hulgal;
- intensiivsus $I(\mu, \phi)$ ja faasifunktsioon $p(\mu, \mu', \phi')$ on treppfunktsioonid, mis on etteantud suundade ümbruses konstantsed ja muutuvad hüppeliselt poolel teel kahe etteantud suuna vahel.

Süsteemi (10) lahendit otsitakse eksponentide summana.

Diskreetsete ordinaatide meetodit kasutatakse neutronite levi teoorias, aga ka atmosfääri kiiruslevis. See on tuntud S_n -meetodi nime all.

Meetodi eelised:

- lahend saadakse ilmutatud kujul,
- ühe lahenduskäiguga saab leida nii intensiivsused keskkonna sees kui läbitulnud ja peegeldunud kiirguse,
- $n = 1, 2$ (s.t. 2 ja 4 voogu) korral saab leida täpsed analüütilised lahendid, voogude arvutamiseks atmosfääris sellest sageli piisab,
- arvutusaeg on enamasti talutav, meetod on realiseeritav ka personaalarvutitel.

Puudused:

- väljavenitatud indikatrissi korral peab sõlmede arv olema väga suur, muidu lähevad vead suureks ja meetod ebastabiilseks.

3.5 Sfääriliste harmoonikute meetod

See meetod on tuntud ka P_n lähendina. See meetod on väga sarnane diskreetsete ordinaatide meetodiga, mõnel parameetrite väärtustel langevad need kaks meetodit kokku.

Levivõrrand arendatakse asimuudi järgi Fourier' ritta, s.t.

$$p(\gamma) = \sum_{l=0}^L p_l P_l(\cos \gamma), \quad (11)$$

siis

$$p(\mu, \mu', \phi') = \sum_{s=0}^L (2 - \delta_{os}) \cos s(\phi - \phi') \sum_{l=s}^L p_l P_s^l(\mu) P_s^l(\mu'), \quad (12)$$

Siin on faasifunktsioonis suunad μ ja μ' lahutatud, valem (12) põhineb Legendre'i polünoomide liitmis-teoreemil

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),$$

kus $P_n(x)$ on Legendre'i kaasfunktsioon.

Intensiivsus I arendatakse samuti asimuudi järgi Fourier'i ritta,

$$I(\tau, \mu, \phi) = \sum_{s=0}^L (2 - \delta_{os}) I^s(\tau, \mu) \cos s(\phi - \phi_0). \quad (13)$$

Valemeis (12) ja (13) on δ_{os} Kroneckeri sümbol,

$$\delta_{os} = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 0 & s \neq 0. \end{cases}$$

Levivõrrand lahutub $L + 1$ võrrandiks

$$\mu \frac{\partial I^s}{\partial \tau} = I^s(\tau, \mu) - J^s(\tau, \mu), \quad (14)$$

kus J^s on allikfunktsiooni rittaarenduse komponent,

$$J^s = \frac{\lambda}{4} p^s F e^{-\tau/\mu} + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 p^s I^s d\mu', \quad (15)$$

$$\text{ja } p^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos s(\phi - \phi') p(\phi) d\phi'.$$

Asendame levivõrrandi järgmise rittaarendusega

$$I^s(\tau, \mu) = \sum_{n=s}^N (2n+1) A_s^n(\tau) P_s^n(\mu), \quad (16)$$

$N = 2p - 1 + s > L$, p - täisarv.

Siis saame lineaarsete 1.-järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi funktsioonide $A_s^n(\tau)$ leidmiseks.

Nende rittaarenduste lõpliku pikkuse korral ei õnnestu rahuldada rajatingimusi kõigi nadiirnurkade korral, seepärast antakse rajatingimused diskreetsel nadiirnurkade hulgal.

Meetod on üles ehitatud sfääriliste harmoonikute ortogonaalsusele. Diferentsiaalvõrrandid $A_s^n(\tau)$ leidmiseks õnnestub mõne faasifunktsiooni korral lahendada analüütiliselt, keerulisemate korral lahendada numbriliselt.

Meetodi peamine eelis on Legendre'i funktsioonide ortogonaalsuse ärakasutamine.

Puuduseks on, et täpsust ei õnnestu enne hinnata. Faasifunktsiooni rittaarenduse pikemaks kasvamisel kasvab ka lahendusaeg.

3.6 Järjestikuste hajumiskordsuste meetod

See on iteratsioonimeetod. Intensiivsus $I(\tau, \mu, \phi)$ esitatakse summana

$$I(\tau, \mu, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)}(\tau, \mu, \phi). \quad (17)$$

Integreerides levivõrrandit (1) τ järgi rajatingimustega

$$I^-(0) = 0$$

$$I^+(\tau_H) = 0,$$

saame

$$I^+(\tau) = I^+(\tau_H) e^{-(\tau_H - \tau)/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_H} J(t) e^{-(t-\tau)/\mu} dt, \quad \mu > 0 \quad (\uparrow)$$

$$I^-(\tau) = I^-(0) e^{\tau/\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau} J(t) e^{-(t-\tau)/\mu} dt, \quad \mu < 0. \quad (\downarrow)$$

Samal viisil saame summa (17) n -komponendi jaoks

$$I^{(n)+}(\tau) = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_H} J^{(n)}(t) e^{-(t-\tau)/\mu} dt,$$

$$I^{(n)-}(\tau) = -\frac{1}{\mu} \int_0^{\tau} J^{(n)}(t) e^{-(t-\tau)/\mu} dt,$$

$$J^{(n)}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\tau, r, r') I^{(n-1)}(\tau, r') dr'. \quad (18)$$

Lahendamist võib alustada $I^{(0)} = 0$ -ga, s.t. esimeses iteratsioonis jätame hajunud kiirguse arvestamata.

Praktilisel arvutamisel asendatakse integraalid (18) paremal poolel kvadratuurvalemitega.

Meetodi plussid:

- selge füüsikaline sisu;
- sama algoritmi saab rakendada homogeensele ja mittehomoogeensele atmosfäärile;
- intensiivsuse saame niimitme nivoo ja suuna jaoks, kui palju on kvadratuursõlmi.

Puudus:

- konservatiivses keskkonnas suure τ korral ei koondunud.

Meetod koondub kiiresti kui on

- tugev neeldumine,
- väike ruumala (vaakuumis või mustal aluspinnal),
- mingi spetsiifiline geometria.

3.7 Gauss-Seideli iteratsioonimeetod

Lähtume levivõrrandi integraalkujust

$$I(\tau) = I(0, \Omega) e^{-\tau/\mu} + \int_0^\tau e^{-(\tau-\tau')/\mu} J(\tau', \Omega) \frac{d\tau'}{\mu}. \quad (19)$$

Jagame atmosfääri N kihiks $\Delta\tau = \tau_H/N$.

Vahemiku (τ_i, τ_{i+2}) jaoks on levivõrrand

$$I(\tau_{i+2}) = I(\tau_i) e^{-2\Delta\tau/\mu} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+2}} e^{-(\tau_{i+2}-\tau')/\mu} J(\tau') \frac{d\tau'}{\mu}. \quad (20)$$

Lähendame valemi (20) integraali

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+2}} e^{-(\tau_{i+2}-\tau')/\mu} J(\tau') \frac{d\tau'}{\mu} \approx J(\tau_{i+1}, \Omega) (1 - e^{-2\Delta\tau/\mu}). \quad (21)$$

Allikfunktsioon $J(\tau_{i+1}, \Omega)$ leitakse numbrilise integreerimisega suuna Ω' järgi üle 4π , siis asendub võrrand (20) lineaarsete algebraliste võrrandite süsteemiga, mis võimaldab rekurrentselt leida langeva kiirguse intensiivsuse kihis $i+2$, kui on teada langeva kiirguse intensiivsus kihtides i ja $i+1$ ning ülesliikva kiirguse intensiivsus kihis $i+1$ eelmise iteratsiooni tulemusena. Nii läbitakse kõik N kihti kuni aluspinnani, arvestatakse peegeldumist aluspinnal ja liigutakse kihthaaval üles tagasi kuni atmosfääri ülemise piirini. See on üks iteratsioon.

Meetodi peamine puudus on, et suurte optiliste paksuste korral kasvab arvutusaeg väga suureks.

3.8 Lõplike vahede meetod

Lähtume levivõrrandi arendusest asimuudi järgi Fourier' ritta, vt. (14) ja (15) p-tis 3.5. Valime sõltumatuks koordinaadiks z -koordinaadi ja diskretiseerime nii z -koordinaadi kui nurkkoordinaatide ruumi,

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z_q, & q &= 1, \dots, N \\ \mu &\rightarrow \mu_m, & m &= -M, \dots, M. \end{aligned}$$

Levivõrrand sõltumatu z -koordinaadi korral

$$\mu \frac{\partial I^s(z, \mu)}{\partial z} = \sigma_e(z) I^s(z, \mu) - \frac{\sigma_s}{z} \int_{-1}^1 p^s I^s d\mu - \frac{\sigma_s}{4} p^s S e^{-\tau/\mu_0} \quad (22)$$

teiseneb diskreetses ruumis integraalsummaks ja lõplikuks diferentsiaaliks,

$$\int_{-1}^1 p^s I^s d\mu' \approx \sum_{m=-M}^M w_m p_{mn}^s I_m^s \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial I_m^s}{\partial z} \right|_{z_q} \approx \frac{I_m^s(q+1) - I_m^s(q-1)}{z_{q+1} - z_{q-1}}. \quad (24)$$

Nii saame algebraaliste võrrandite süsteemi. Probleeme on rajatingimustega ja energia jäävusega – rajatingimused saab samuti anda vaid diskreetses ruumis, ka faasifunktsioon tuleb normeerida koordinaatide diskreetsel võrgul.

Meetodi voorused:

- kiire,
- võimalik on suur täpsus,
- kasutatav ka vertikaalse mittehomogeensuse korral,
- meetod on paindlik, samas algoritmis on lihtsasti varieeritav nivoode ja suundade arv,
- töötab hästi ka suurte optiliste paksuste korral.

Puudused:

- suundade ja nivoode arvu valikuks ei ole mingeid üldisi kriteeriume,
- võrgu sõlmede vahel on vajalik interpoleerimine,
- vead kasvavad, kui on suured erinevused üles ja alla suunatud voogudes ($H_1/H_2 \sim 10^{\pm 4}$).

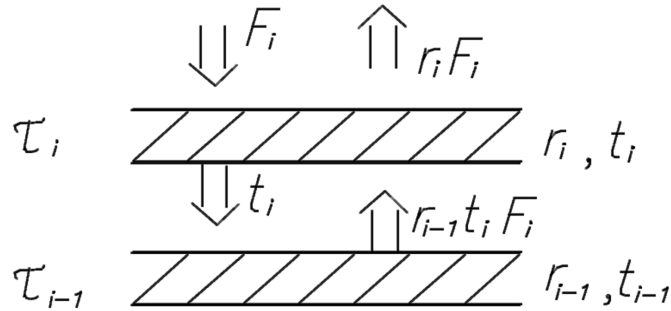
Iteratsioonimeetodeid ja lõplike vahede meetodit on põhjalikult analüüsinud Smelov (1978, ptk. 3).

3.9. Liitmismeetod (Adding Method, Doubling Method)

Meetodi idee on lihtne: kui on teada kahe kihi peegeldus- ja läbilaskefunktsioonid, siis saame leida liitkihi peegeldus- ja läbilaskefunktsioonid, arvestades vastastikuseid peegeldusi kummaski suunas.

Kui F_i on voog, mis langeb kihile τ_i , siis tagasi peegeldub $r_i F_i$, läbi kihi τ_i läheb $t_i F_i$, kihilt τ_{i-1} peegeldub $r_{i-1}(t_i F_i)$.

Defineerime kihi τ_i jaoks operaatorid r'_i ja t'_i , mis kirjeldavad, kuidas kiht τ_i reageerib voole alt üles. Voog, mis peegeldub kihilt τ_{i-1} ja läbib kihi τ_i ülespoole, on $t'_i(r_{i-1} t_i F_i)$ ja tagasi kihi τ_{i-1} poole peegeldub voog $r'_i(r_{i-1} t_i F_i)$.



Joonis 3.1. Vood liitmismeetodis.

Kogu voog, mis väljub kihist τ_i ülespoole on

$$\begin{aligned} F_{i'} &= [r_i + t_i' r_{i-1} t_i + t_i' r_{i-1} r_i' r_{i-1} t_i + \dots] F_i = \\ &= [r_i + t_i' r_{i-1} [\sum_{n=0}^{\infty} (r_i' r_{i-1})^n t_i]] F_i. \end{aligned} \quad (25)$$

Muist kiirgust ei peegeldu tagasi neeldumise ja/või läbilaske tõttu, seega $\|r_i' r_i\| < 1$ ja eksisteerib $(I - r_i' r_{i-1})^{-1}$, kus I on ühikoperaator.

Defineerime liitkihi peegeldumisoperaatori

$$F_i' = R_i F_i, \quad (26)$$

siis valemist (25)

$$R_i = r_i + t_i' r_{i-1} (I - r_i' r_{i-1})^{-1} t_i, \quad (27)$$

kus

$$(I - r_i' r_{i-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (r_i' r_{i-1})^n$$

Siin on geomeetrilise progressiooni summa.

Samal viisil saadakse liitkihist $\tau_1 + \tau_2$ läbi tulnud kiirguse jaoks, s.t. liitkihi läbilaskefunktsiooni jaoks

$$T_{i-1} = t_{i-1} (I - r_i' r_{i-1})^{-1} t_i. \quad (28)$$

Seda protseduuri võime jätkata, kuni summaarne optiline paksus $\tau = \sum_i \tau_i$ on saavutanud vajaliku suuruse. Alustatakse nii õhukesest kihist, mille jaoks on lahendid r ja t jaoks kergesti leitavad.

Kui t ja r ei olene sügavusest, võib iga järgmise kihi võtta kaks korda paksema kui eelmise (doubling method). Nii on ülesanne väga kiiresti lahenduv ka suurte optiliste paksuste korral. Mittehomogeenses keskkonnas tuleb liita õhukesi kihte ja lahendusajad võivad kasvada ülemäära suureks.

Kui vaatleme intensiivsusi, siis on r_i ja t_i funktsioonid või diskreetsel kujul maatriksid $(r_{kl,i}), (t_{kl,i})$, mis kirjeldavad peegeldumist/läbilaset suunast Ω_k suunda Ω_l . Üldjuhul on nende maatriksite komponendid 4-komponendilised vektorid nelja Stokes'i parameetri jaoks. Maatriksite dimensioon on määratud faasifunktsiooni kujuga ja vajaliku suundade arvuga/täpsusega. Kui piirduda ainult intensiivsustega, siis on skalaarmaatriksid.

Liitmismeetod iseenesest ei sisalda üldse levivõrrandi lahendamist, see on meetod, kuidas leida lõpliku optilise paksusega keskkonna kiirgusrežiimi, kui on teada diferentsiaalse kihi peegeldus- ja läbilaskefunktsioonid.

Läbilaskefunktsioonis (28) on enamasti otstarbekas eristada otsese kiirguse ja difuusse kiirguse läbilaset.

4 Täiendavad peatükid

4.1 Väikeste nurkade lähend

Lenoble, 1990, ptk. 4.6

Levivõrrandis eraldatakse otsene kiirgus ja hajunud kiirgus

$$I = I_D + \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0) \pi F e^{-\tau/\mu_0}$$

$$-\mu \frac{dI_D}{d\tau} = I_D - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} I_D p(r, r') dr' - \frac{\lambda}{4} p(r, r_0) F e^{-\tau/\mu_0} . \quad (1)$$

Võrrandi (1) lahend esitatakse kujul

$$I = I^* + I^\downarrow, \quad (2)$$

kus väikeste nurkade lähend I^* on võrrandi

$$-\mu_0 \frac{dI^*}{d\tau} = I^* - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} p(r, r') I^* dr' - \frac{\lambda}{4} p(r, r_0) F e^{-\tau/\mu_0} . \quad (3)$$

lahend, kui rajatingimus on

$$I^*(\tau, \mu, \phi) \equiv 0 \quad -1 \leq \mu \leq 1 . \quad (3a)$$

Võrrandis (3) on vasakul suunakoosinus μ_0 , rajatingimus (3a) tähendab, et kihilt ei peegeldu midagi tagasi.

Lahutades võrrandist (1) võrrandi (3), saame võrrandi I^\downarrow jaoks,

$$-\mu \frac{dI^\downarrow}{d\tau} = I^\downarrow - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} p(r, r') I^\downarrow(r') dr' - (\mu_0 - \mu) \frac{dI^*}{d\tau} . \quad (4)$$

Kumbki võrrand eraldi võetuna on lahendatav lihtsamini kui üldine levivõrrand. Võrrandi (4) lahendi nurkolenevus on nõrk.

Meetodit kasutatakse tugevasti anisotroopse faasifunktsiooni korral, kui domineerib edasihajutamine (hajumine jämedal aerosoolil, suspensioonides) ja kollimeeritud kimpude levi arvutamiseks: laseri kiire levi, lidari signaali arvutus ja interpreteerimine, s.t. nii läbilase kui peegeldumine on vaja leida väikeste hajumisnurkade lähenduses.

4.2 Faasifunktsiooni lähendamine

Kiirguslevis laiialt kasutusel olev faasifunktsiooni rittaarendus

$$p(\gamma) = \sum_l p_l P_l(\cos \gamma) \quad (5)$$

kasvab sageli ülemäära pikaks. Otstarbekas on eraldada otse edasi hajumine δ -funktsioonina,

$$p(\cos \gamma) = 2f \delta(1 - \cos \gamma) + \tilde{p}(\cos \gamma), \quad (6)$$

kus $\tilde{p}(\cos \gamma)$ on faasifunktsioon ilma tiputa $\gamma = 0$ suunas, $2f$ on kaal, mille võib ette anda. Siis normeerimistingimustest

$$2f = 2 - \int_{-1}^1 \tilde{p}(\cos \gamma) d(\cos \gamma) \quad (7)$$

saame ümbernormeeritud jääkindikatrissi

$$p^1(\cos \gamma) = \frac{\tilde{p}(\cos \gamma)}{1 - f}. \quad (8)$$

Asendades faasifunktsiooni (6) võrrandis (1), teiseneb levivõrrand nii, et võime defineerida uue efektiivse ühekordse hajumise albeedo

$$\lambda' = \frac{\lambda(1 - f)}{1 - \lambda f} \quad (9)$$

ja efektiivse optilise sügavuse

$$\tau' = (1 - \lambda f) \tau. \quad (10)$$

Kui reas (5) piirdume kahe liikmega ja lisame δ -funktsiooniga edasihajutamise maksimumi, saame δ -Eddington'i meetodi nime all tuntud lähendi.

Kasutatakse ka edasihajutamise maksimumi lähendamist Gaussi funktsioonide summaga,

$$p(\gamma) = \sum_l A_l \exp(-\alpha_l \gamma^2) + \tilde{p}(\cos \gamma). \quad (11)$$

Jääkindikatrissi $\tilde{p}(\gamma)$ võib omakorda ikkagi arendada Legendre'i polünoomide järgi, et saada paremat indikatrissi lähendit suurte hajumisnurkade γ korral.

4.3 Kiirguslevi taimkattes

Enamus maismaast on suuremal või vähemal määral kaetud taimkattega, s.t. atmosfääri aluspinnaks on taimkate. Iseseisva tähenduse on omandanud taimkatte peegeldusteooria kui loodusressursside kaugseire teoreetiline alus.

Vaatleme levivõrrandit tasaparalleelses keskkonnas

$$\mu \frac{dI}{dz} = -\alpha I + \int_{4\pi} \sigma_s I(\Omega') d\Omega'. \quad (1)$$

Iseärasused taimkattes:

lisaks intensiivsuse suundolenevusele $I = I(z, \Omega)$ olenevad suunast ka keskkonna optilised omadused – nõrgenemiskoeffitsient $\alpha = \alpha(z, \Omega)$ ja hajumiskoeffitsient $\sigma_s = \sigma_s(z, \Omega, \Omega')$ on funktsioonid mõlemast suunast Ω ja Ω' eraldi, mitte ainult nende vahelisest nurgast $\gamma = \widehat{\Omega\Omega'}$.

Kiirgusväli taimkattes on ülimalt fluktuatuur. Vaatleme otsese kiirguse läbitulekut. Kiire teele ette jäävast lehelt või varrest otsene kiirgus läbi ei paista. Otses läbi tulnud kiirguse väli on impulss-signaal, mis omab Bernoulli jaotust. Niisuguse kiirgusvälja ja keskkonna kirjeldamine on mõeldav ainult statistiliselt – tõenäosuste, keskväärtuste, dispersioonide tasemel. Probleemiks on nende statistiliste parameetrite ja levivõrrandis olevate parameetrite sidumine taimkatet iseloomustavate parameetritega:

- taimede/taimkatte fütomeetrilised parameetrid,
 - taimede arv $1/m^2$,
 - taimede kõrgus,
 - lehtede ja varte pindala m^2/m^2 ,
 - kuivaine hulk kg/m^2 ,
 - lehtede ja varte orientatsioon,
- taimede morfoloogilised iseärasused,
- fütoelementide optilised omadused.

Fütoelementide optilised omadused on optilises diapasoonis tugevasti varieeruvad, aga kogu optilises diapasoonis on üks leht/vars optiliselt paks, nii et lehte läbinud kiirgus on sügavusrežiimis ja otse läbi tulnud kiirguse intensiivsus on kaduvväike. Lehest läbi tulnud kiirguse nurkjaotus kaldub küll oluliselt kõrvale isotroopsest, aga lehtede statistiline orientatsioon silub need kõrvalekalded, nii et kiirguslevi mudelites piirduakse enamasti isotroopse läbitulekuga.

Keerulisem on lehelt peegeldumine. Saame eristada difuusset tagasihajumist lehe sees – umbes samasuguse nurkjaotusega kui läbitulnud kiirgus – ja Fresnel'i seaduse järgi peegeldumist lehte katvalt vahalt. Lehe (vaha) pinna ebatasasuse tõttu on peegelkomponent laiali määratud mingisse lõplikku koonusesse lehe makronormaaliga määratud peegelsuuna ümbruses.

Tõhus moodus kiirguslevi uurimiseks on Monte Carlo meetod:

- kirjeldame arvutis taimkatte, s.t. taimede arvu ja paiknemise, lehtede arvu, suuruse, asukoha ja orientatsiooni, varte pikkuse ja läbimõõdu, lehtede ja varte optilised omadused;
- suuname taimkattesse footonite kimbu ja analüüsime footonite käitumist/saatust.

Monte Carlo meetod on väga võimalusterohke, saame varieerida kõikvõimalikke struktuuri- ja optilisi parameetreid, analüüsida eraldi ühekordset ja mitmekordset hajumist – aga Monte Carlo meetod on väga arvutusmahukas. Võimalikud on vead programmide koostamisel.

Arvestades kiirguslevi ulatuslikku ja mitmekülgset arendatud matemaatilist aparati, on otstarbekas püüda rakendada klassikalist kiirgusleviteooriat ka taimkattes. Taimkatte kiirguslevi teooria on oluliselt üles ehitatud keskväärtuste tasemel, eeldades taimkatte statistilist homogeensust. On ilmunud ja ilmumas mõned tööd, mis arvestavad taimkatte makrostruktuuri: põõsaste või puude read, fütoelementide pindala tiheduse või optiliste omaduste perioodiline varieeruvus mingi ette antud funktsionaalse seaduspärasuse järgi. Tehtud on ainult üksikud katsetused kiirgusvälja statistilise muutlikkuse kirjeldamiseks dispersioonide tasemel, kasutades hüdrodünaamika ja turbulentsiteooria matemaatilist aparati (Anisimov & Menžulin).

Šifrin (1953) tegi esimese katse hinnata levivõrrandi koefitsiente taimkattes, leides, missugused need koefitsiendid peaksid olema, et kahe voo lähend annaks mõõdetud taimkatte albedo.

4.3.1 Taimkate kui plaatkeskkond

Olulise panuse taimkatte kiirgusleviteooriasse tegid Tõravere teadlased Ross & Nilson 1960. aastail ja hiljem. Nad käsitasid taimkatet kui plaatkeskkonda, s.t. maapinna ja taimkatte mõttelise ülemise pinna vaheline ruumala on täidetud väikeste (elementaar-) pindadega – plaatidega. Need plaadid peegeldavad difuuselt ja lasevad läbi difuusset kiirgust, ρ_L ja τ_L on plaatide peegeldus- ja läbilaskekoefitsiendid.

Plaatide hulka kirjeldatakse plaatide (ühe külje) pindala tihedusega m^2/m^3 , see pindala tihedus u_L võib olla funktsioon sügavusest, $u_L = u_L(z)$. Orientatsiooni kirjeldatakse plaatide normaalide tõenäosustihedusega $g_L(\vec{r})$. Mudelis piirdatakse enamasti asimuudist sõltumatu lehtede/plaatide kaldenurkade jaotusega $g_L(\vec{r}) = (1/2\pi)g_L(\theta_L)$. Plaatide horisontaalsuunas paiknemist, kuju ning suurust ei konkre- tiseerita.

Plaadid ei ole samased lehtedega, suure kõvera pinnaga lehe võib jagada elementaarplaatideks, ka vart saab kujutada koosnevana suurest hulgast tasapinnalistest elementaarplaatidest.

A. G-funktsioon

Otsese kiirguse nõrgenemine/läbitulek on määratud tõenäosusega kohata plaati, see tõenäosus omakorda on määratud lehepindala tihedusega u_L ja lehtede orientatsiooniga ning on esitatav nn. Ross-Nilsoni G -funktsiooni abil. See on ühikulise lehepinna projektsioon vaatesuunaga (kiirte suunaga) risti olevale pinnale

$$G_L(\vec{r}) = \int_{2\pi} g_L(\vec{r}_L) \underbrace{|\cos \widehat{\vec{r}\vec{r}_L}|}_{= |\vec{r}\vec{r}_L|} d\vec{r}_L. \quad (12)$$

Ekraanemisest tingitud otsese kiirguse ruumnõrgenemis-koefitsient

$$k^*(\vec{r}) = u_L G_L(\vec{r}), \quad (13)$$

ja keskkonna optiline paksus vaatesuunas

$$\tau = \int_0^H u_L G_L(\vec{r}) dz/\mu = \int_0^H u_L G_L(\vec{r}) ds. \quad (14)$$

$u_L ds$ [dimensioonita] on lehepindala indeksi juurdekasv dL , seega võib minna lehepindala indeksi koordinaatidesse,

$$\tau = \int_0^L G_L(\vec{r}) dL = L_H G_L/\mu, \quad G_L(\vec{r}) = \text{const}, \quad (15)$$

L_H - lehepinna indeks.

B. Faasifunktsioon plaatkeskkonnas

$$\frac{1}{\pi} \Gamma_L(\vec{r}', \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} g_L(\vec{r}_L) |\vec{r}_L \vec{r}'| |\vec{r}_L \vec{r}| p(\vec{r}', \vec{r}; \vec{r}_L) d\vec{r}_L. \quad (16)$$

Siin on $p(\vec{r}', \vec{r}; \vec{r}_L)$ ühe lehe (plaadi) faasifunktsioon. Kui leht on isotroopne peegeldaja ja läbilaskja, siis lahutub (16) kaheks komponendiks

$$\Gamma_L = \Gamma_R + \Gamma_T,$$

kus

$$\Gamma_R = \frac{\rho_L}{2} \int_{\Omega_R} g_L(\vec{r}_L) |\vec{r}_L \vec{r}'| |\vec{r}_L \vec{r}| d\vec{r}_L \quad \text{ja} \quad (17)$$

$$\Gamma_T = \frac{\tau_L}{2} \int_{2\pi - \Omega_R} g_L(\vec{r}_L) |\vec{r}_L \vec{r}'| |\vec{r}_L \vec{r}| d\vec{r}_L.$$

ρ_L - lehe peegelduskoefitsient,

τ_L - lehe difuusse läbilaske koefitsient,

piirkond Ω_R määratakse tingimusest $(\vec{r}'_L \vec{r}'')(\vec{r}'_L \vec{r}) > 0$, s.t. suundadest \vec{r} ja \vec{r}' paistab lehe sama külge (kas ülemine või alumine) – siis on peegeldumine. Kui $(\vec{r}'_L \vec{r}'')(\vec{r}'_L \vec{r}) < 0$, siis langevad vektorid \vec{r} ja \vec{r}' lehe eri külgedele ja faasifunktsioonis on tegemist läbilaskega.

Tugeva neeldumise piirkonnas kui $\rho_L, \tau_L < 0.1$, tuleb faasifunktsioonis tingimata arvestada ka Fresnel'i peegeldumist lehe pinnalt. Lehte katva vaha murdumisnäitaja on $n = 1.35 \div 1.4$, siis on lehele risti langeva valguse Fresnel'i peegelduskoeffitsient

$$\rho_{Fr} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \approx 0.02 \div 0.03,$$

kui $\theta'' \rightarrow \pi/2$, siis $\rho_{Fr} \rightarrow 1$.

Fresnel'i peegelduskoeffitsient polariseerimata valgusele on

$$\rho_{Fr} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(\alpha - i)}{\sin^2(\alpha + i)} + \frac{\tan^2(\alpha - i)}{\tan^2(\alpha + i)} \right], \quad (18)$$

kus $\sin i = \sin \theta''/n$, θ'' – langemisnurk lehel. Lehe faasifunktsioonis on Fresnel'i komponent (18) korrutatud δ -funktsiooniga,

$$p(\vec{r}', \vec{r}; r_L) = \rho_{Fr} \delta(\vec{r} - \vec{r}''),$$

kus \vec{r}'' on peegelsuund,

$$\Gamma_{Fr} = \int_{2\pi} g_L(r_L) \rho_{Fr} \delta(\vec{r} - \vec{r}'') d\vec{r}_L. \quad (19)$$

C. Otsese kiirguse levi

Otsese kiirguse läbitulek-levi on võrreldav nõela torkamisega taimkattes. Kui nõela teele ei jää ühtegi plaati, siis paistab otsene kiirgus läbi.

Olgu A tõenäosus, et kihis ΔL on kontakt ja B – tõenäosus, et ei ole kontakti. ΔL olgu nii väike, et selles ei teki rohkem kui üks kontakt, siis $A + B = 1$. Tõenäosus, et N kihis leiaks aset n kontakti, arvutatakse binoomvalemiga

$$P_n(L, \vec{r}) = \frac{N!}{n!(N-n)!} A^n (1 - A)^{N-n},$$

ja tõenäosus, et ei ole kontakti ($n = 0$)

$$P_0(L, \vec{r}) = [1 - A]^N, \quad (20)$$

$$A = G(\vec{r}) \Delta L / \mu.$$

Kui $N \rightarrow \infty$, saame juhuslikult paiknevate lõpmata väikeste lehtedega taimkatte (Poissoni seaduse järgi paiknemine)

$$P_0(L, \vec{r}) = \exp(-\bar{n}(L, \vec{r})), \quad (21)$$

kus

$$\bar{n}(L, \vec{r}) = \frac{1}{\mu} \int_0^L G(L, \vec{r}) dl \quad (22)$$

on keskmine kontaktide arv kihis L .

Tõenäosus, et kihis on vähemalt üks kontakt, on katteväärtus,

$$W(\vec{r}) = 1 - \exp(-\bar{n}(L, \vec{r})). \quad (23)$$

D. Lehtede kaldenurkade jaotus

Faasifunktsiooni ja G-funktsiooni leidmisel on põhiprobleemiks lehtede kaldenurkade jaotuse $g_L(\vec{r}_L)$ mõõtmine. See on väga töömahukas. Teise võimaluse annavad valemid (22) ja (23). Mõõdame katteväärtust eri suundades, siis valemist (23)

$$\bar{n} = G(\mu) L / \mu = -\ln(1 - W) \quad (24)$$

ja siit

$$G(\mu) = \int_0^{\pi/2} g_L(\mu_L) |\vec{r} \vec{r}_L| d\mu = \frac{-\mu \ln(1 - W)}{L} \quad (25)$$

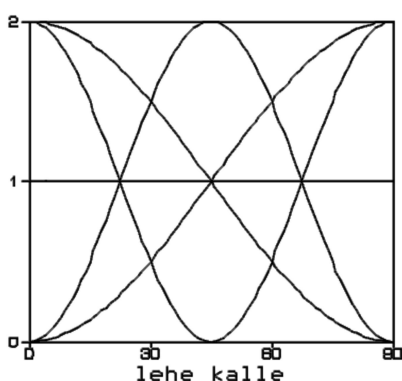
või mõõtes kaldnõelaga kontakte taimkattes, saame otse valemist (24)

$$G(\mu) = \frac{\bar{n} \mu}{L}.$$

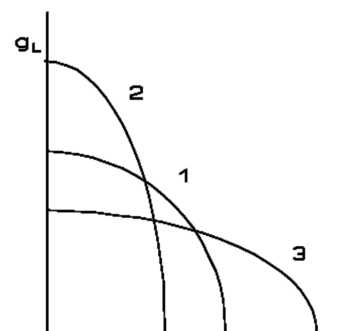
Lehenormaalide orientatsiooni g_L leidmiseks tuleb lahendada integraalvõrrand (25). Seda on palju uuritud, lahendid on ebastabiilsed, väikesed vead katteväärtuses (kontaktide arvus) põhjustavad g_L -s väga suuri vigu.

Praktikas kasutatakse mitmesuguseid analüütilisi mudeljaotusi (joonis 4.1) ning G_L ja Γ_L arvutatakse analüütiliselt või numbrilise integreerimisega:

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|------|
| – sfääriline jaotus | $g_L = 1$ | |
| – fikseeritud kaldenurk | $g_L = \delta(\theta_L - \theta_m)$ | |
| – planofiilne orientatsioon | $g_L = (2/\pi)(1 + \cos 2\theta_L)$ | |
| – erektofiilne orientatsioon | $g_L = (2/\pi)(1 - \cos 2\theta_L)$ | |
| – plagiofiilne orientatsioon | $g_L = (2/\pi)(1 - \cos 4\theta_L)$ | |
| – ekstremofiilne orientatsioon | $g_L = (2/\pi)(1 + \cos 4\theta_L)$ | (26) |



Joonis 4.1. Klassikalised analüütilised lehtede kaldenurkade jaotused.



Joonis 4.2. Lehtede ellipsoidaalne kaldenurkade jaotus polaarkoordinaatides.

Kasutatakse veel

- ellipsoidaalne jaotus (joonis 4.2) – see on ühe-parameetriline
- β -jaotus (joonis 4.3) – see on kahe-parameetriline, suurtes piirides varieeritav,

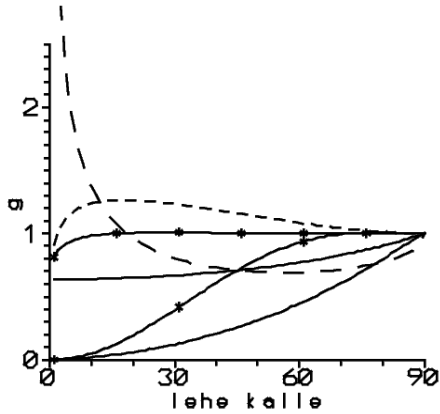
$$g_L \sim \frac{(\theta)^{\nu-1} (1-x)^{\mu-1}}{\beta(\nu, \mu)},$$

$$\beta(\nu, \mu) = \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu + \mu)}$$

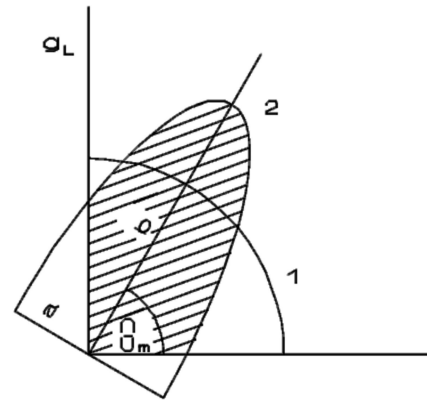
- elliptiline jaotus (joonis 4.4) – see on kahe-parameetiline, θ_m – jaotuse mood

$$g_L = \frac{B}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2(\theta_L - \theta_m)}},$$

$$\epsilon = \sqrt{1 - a^2/b^2}, \quad \frac{a}{b} \in [0, 1].$$

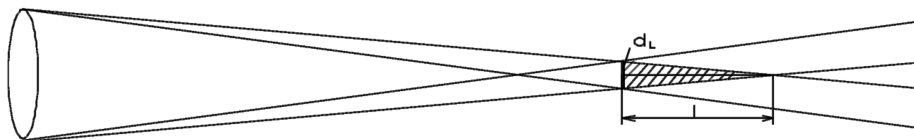


Joonis 4.3. Lehtede kaldenurkade β -jaotus.



Joonis 4.4. Lehtede kaldenurkade elliptiline jaotus polaarkoordinaatides.

4.3.2 Poolvarjud ja difraktsioon



Joonis 4.5. Poolvarjude teke.

Päikesel on lõplik nurkläbimõõt $D_{\odot} \approx 0.5^{\circ}$, sellepärast on ekraanidel poolvari. Täisvarju ulatus $d_L = 2$ cm korral on $l = 2.1$ m. Taimkattes on poolvarjude osatähtsus suur. Lehtede keerulise kuju ja statistilise orientatsiooni tõttu on poolvarju arvestamine väga raske.

Difraktsioon ei ole ekraanide suurte mõõdete tõttu üldjuhul arvestamist vääriv: kui $r_L = 1$ mm, siis difraktsiooni esimese maksimumi nurkhälve on $2.6''$. Võibolla ainult okaspuude kasvude regulaarsest struktuurist tekkiv difraktsioonivõre annab mõnesuguse efekti.

4.3.3 Opositsiooniefekt

Suurte varje heitvate elementidega keskkonnas on tagasisuunas hajumise korral footoni keskkonnast välja pääsemise tõenäosus suurem kui teistes suundades. Seda on tingimata vaja arvestada peegeldumisindikatriisi arvutamisel. Leiame keskkonna ühekordse hajumise heleduskoeffitsiendi. Diferentsiaalselt

kihilt dz sügavuselt z jõuab välja intensiivsus

$$dI^{(1)} = \frac{dz}{\mu} \cdot \frac{u_z \Gamma_L}{\pi} \cdot I_0 Q(z, \mu_1, \mu_2, \phi), \quad (27)$$

kus

I_0 – Pääkese otsene kiirgus taimkatte kohal,

$Q(\)$ – suundade \vec{r}_1 ja \vec{r}_2 korraga avatud olemise tõenäosus sügavuselt z vaadates.

Kogu kihilt peegeldunud intensiivsus

$$I^{(1)} = \int_0^H dI^{(1)}$$

ja heleduskoeffitsient

$$\rho(\mu_1, \mu_2, \phi) = \frac{I^{(1)}}{I_0 \mu_1} = \int_0^H \frac{\Gamma_L}{\mu_1 \mu_2} u(z) Q(z, \mu_1, \mu_2, \phi) dz. \quad (28)$$

Kui läbipaistvus valgustusuunas ja vaatesuunas on sõltumatu, siis

$$Q(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = P_0(\vec{r}_1) P_0(\vec{r}_2). \quad (29)$$

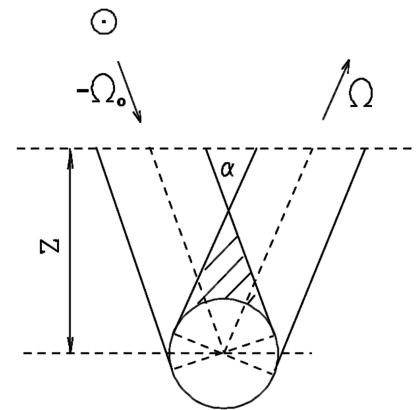
Kui valgustusuund ja vaatesuund langevad kokku (otse tagasi hajumine), siis $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$ ja

$$Q(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = P_0(\vec{r}_1). \quad (30)$$

Vahepealsetel suundadel toimub pidev üleminek

$$P_0(\vec{r}_1) P_0(\vec{r}_2) \rightarrow P_0(\vec{r}_1).$$

Tõenäosuse $Q(\)$ arvutamine on suhteliselt lihtne ühe-suuruste juhuslikult paiknevate sfääriliste osakestega keskkonnas. Osake on valgustatud, kui silindris V_1 ei ole ühtegi osakest. Selle tõenäosus on $P_0(\vec{r}_1) = \exp(-\kappa V_1)$, kus κ – osakeste arv/m³. Osake on näha tõenäosusega $P_0(\vec{r}_2) = \exp(-\kappa V_2)$ ja vaatleja näeb valgustatud osakest tõenäosusega $Q = \exp(-\kappa(V_1 + V_2 - V_3))$. Kui nurk γ on suur ja sügavus z on suur, siis $V \approx V_1 + V_2$. Kui \vec{r}_1 ja \vec{r}_2 langevad kokku, siis $V = V_1$ ($V_2 = V_3 = V_1$). Plaatkeskkonnas on ühisosa V_3 arvutamine väga keeruline – see sõltub orientatsioonist, ka on sügavus z suures osas taimkattest nii väike, et koonuse V_3 tipp lõigatakse ära. Siis on $Q(\)$ leidmiseks tulemusrikkam indikaatorfunktsioonide ja nende korrelatsioonifunktsiooni kasutamine (Kuusk, 1983).



Joonis 4.6. Opositsiooniefekt sfääriliste osakestega keskkonnas

4.3.4 Polariseatsioon

Atmosfääris tekib polariseatsioon Rayleigh'i hajumise tulemusel. Taimkattes tekib polariseatsioon Fresnel'i peegeldumisel: s -komponent – elektrivectoriga paralleelne

$$\gamma_s(\alpha, n) = \frac{\sin^2(\alpha - i)}{\sin^2(\alpha + i)}, \quad (31)$$

p -komponent – elektrivektoriga risti

$$\gamma_p(\alpha, n) = \frac{tg^2(\alpha - i)}{tg^2(\alpha + i)}, \quad (32)$$

kus $\sin i = (\sin \alpha)/n$.

Kogu peegeldunud intensiivsus on võrdeline

$$\gamma_{Fr} = (\gamma_s + \gamma_p)/2, \quad \text{vt. (18).}$$

Selle lineaarselt polariseeritud osa on

$$\gamma_{LP} = (\gamma_s - \gamma_p)/2.$$

Difuusselt peegeldunud kiirgus on polariseerimata, s.t.

$$\Gamma_s \sim \gamma_D + \gamma_s,$$

$$\Gamma_p \sim \gamma_D + \gamma_p$$

ja

$$\Gamma_s - \Gamma_p \sim \gamma_s - \gamma_p,$$

seega

$$\rho_s - \rho_p \sim \gamma_s - \gamma_p.$$

Siin on γ – ühe lehe peegeldumiskoeffitsient. Võrdeteguris on valemi (19) põhjal lehtede kaldenurkade jaotustihedus $g_L(r_L)$. Seega polarisatsiooni mõõtmine võimaldab leida lehtede kaldenurkade jaotust.

4.4 Soojuskiirguse levi atmosfääris

Soojuskiirguse piirkonnas puudub arvestatav hajumine, küll aga on vaja arvestada omakiirgust. Siis on levivõrrand

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau} = I_\nu - B_\nu(T), \quad (33)$$

kus allikfunktsioon $B_\nu(T)$ on Plancki funktsioon,

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/kT} - 1)}, \quad (34)$$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ – Boltzmanni konstant,

$h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ – Plancki konstant,

c – valguse kiirus,

ν – valguse sagedus.

Võrrandi (33) lahend on

$$I_\nu(\tau, \mu) = I_\nu(\tau_1, \mu) e^{-(\tau_1 - \tau)/\mu} + \int_\tau^{\tau_1} B_\nu(T(\tau')) e^{-(\tau' - \tau)/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}. \quad (35)$$

Rajatingimuseks on maapinna (aluspinna) kiirgus

$$I_{\nu}(\tau_1, \mu) = B_{\nu}(T_g),$$

kus T_g on maapinna temperatuur, soojuskiirguse piirkonnas on maapind praktiliselt must. Et arvestada energiavahetust kiirguse teel, on vaja integreerida lahendeid üle sageduste

$$F \uparrow (\tau) = \int_0^{\infty} F_{\nu} \uparrow (\tau) d\nu, \quad F \downarrow (\tau) = \int_0^{\infty} F_{\nu} \downarrow (\tau) d\nu,$$

kus $F_{\nu} \uparrow (\tau) = \int_{2\pi^-} I_{\nu}(r) dr$ ja $F_{\nu} \downarrow (\tau) = \int_{2\pi^+} I_{\nu}(r) dr$.

Kirjandus

a) monograafiaid

Myneni, R.B., Ross, J. and Asrar, G. A review on the theory of photon transport in leaf canopies, *Agricult. and Forest Meteorol.* 1989, 45: 1–153.

Myneni, R.B. and Ross, J. (Eds). *Photon-Vegetation Interactions: Applications in Optical Remote Sensing and Plant Ecology*, Springer, Heidelberg, 1991, 565 pp.

Vainikko, G. Kiirguslevi. *Matemaatilise füüsika täiendavaid peatükke*, Tartu Ülikool, 1990, 92 lk.

Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. Теория переноса излучения. М., Наука, 1983, 216 с.

Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., Мир, 1986, 660 с.

Ерлов Н.Г. Оптика моря, Гидрометеиздат, Л., 1980, 248 с.

Иванов А.П. Физические основы гидрооптики, Наука и техника, Минск, 1975, 503 с.

Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1, Т. 2, М., Мир, 1981, 280+317 с.

Ленобль Ж. (под ред.) Перенос радиации в рассеивающих атмосферах. Стандартные методы расчета. Гидрометеиздат, Л., 1990, 263 с.

Росс Ю.К. Радиационный режим и архитектура растительного покрова. Л., Гидрометеиздат, 1975, 342 с.

Росс Ю., Князихин Ю., Кууск А., Маршак А., Нильсон Т. Математическое моделирование переноса радиации в растительных средах. Гидрометеиздат, СПб, 1992, 197 с.

Смелов В.В. Лекции по теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1978, 216 с.

Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гос. изд. техникотеорет. лит. 1956, 391 с.

Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. М. Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.. 1972, 335 с.

Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., Изд. иностр. лит. 1953, 431 с.

b) artiklid

Cooper, K., Smith, J.A., Pitts, D. (1982), Reflectance of a vegetation canopy using the adding method, *Appl. Opt.*, 21(22): 4112-4118.

Hansen, J.E. (1971), Multiple scattering of polarized light in planetary atmospheres. Part 1. The doubling method, *J. Atmos. Sci.*, 28(1): 120-125.

Joseph, J.H., Wiscombe, W.J. and Weinman, J.A. (1976), The delta-Eddington approximation for radiative flux transfer, *J. Atmos. Sci.*, 33(12): 2452-2459.

- Meador, W.E. and Weaver, W.R. (1980), Two-stream approximations to radiative transfer in planetary atmospheres: A unified description of existing methods and a new improvement, *J. Atmos. Sci.*, 37(3): 630-643.
- Shettle, E.P. and Weinman, J.A. (1970), The transfer of solar irradiance through inhomogeneous turbid atmospheres evaluated by Eddington's approximation, *J. Atmos. Sci.*, 27(7): 1048-1055.
- Twomey, S., Jacobowitz, H., and Howell, H.B. (1966), Matrix methods for multiple-scattering problems, *J. Atmos. Sci.*, 23(3): 289-296.

Sisukord

1	Kiirgusvälja ja keskkonda iseloomustavad suurused	3
1.1	Radiomeetrilised karakteristikud – Radiometric quantities	3
1.2	Materjali karakteristikud – Material characteristics	4
1.3	Taimkatte fütomeetrilised parameetrid – Phytometric characteristics of a plant stand . . .	8
1.4	Intensiivsuse seos Pointingi vektoriga	10
1.5	Stokes'i parameetrid	10
2	Levivõrrand	12
2.1	Levivõrrandi tuletamine	12
2.2	Mittestatsionaarne kiirguslevi	13
2.3	Rajatingimused	14
2.4	Levivõrrandi integraalkuju	15
2.5	Levivõrrandi erijuhud	16
3	Levivõrrandi lahendamine	30
3.1	Eddingtoni meetod	30
3.2	Kahe voo lähend	31
3.3	Monte Carlo meetodid	32
3.4	Diskreetsete ordinaatide meetod	32
3.5	Sfääriliste harmoonikute meetod	33
3.6	Järjestikuste hajumiskordsuste meetod	34
3.7	Gauss-Seideli iteratsioonimeetod	35
3.8	Lõplike vahede meetod	36

4	Täiendavad peatükid	39
4.1	Väikeste nurkade lähend	39
4.2	Faasifunktsiooni lähendamine	39
4.3	Kiirguslevi taimkattes	40
4.3.1	Taimkate kui plaatkeskkond	41
4.3.2	Poolvarjud ja difraktsioon	45
4.3.3	Opositsiooniefekt	45
4.3.4	Polarisatsioon	46
4.4	Soojuskiirguse levi atmosfääris	47