

TARTU OBSERVATOORIUM

—

TARTU ÜLIKOOL

—

BIOGEOFÜÜSIKA ÕPPETOOL / KESKKONNAFÜÜSIKA INSTITUUT

JUHUSLIKE FUNKTSIOONIDE TEOORIA

Loengukonspekt

Andres Kuusk

Tõravere-Tartu 1996

Sisukord

Eessõna	3
1 Juhuslikud suurused. Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon	4
2 Tõenäosus ja šanss. Juhusliku suuruse tõenäosustihedus	6
3 Juhusliku suuruse momendid	7
4 Fourier' teisendus	10
5 Karakteristlik funktsioon	16
6 Diskreetsed jaotused	18
7 Pidevad jaotused	21
8 Funktsioon juhuslikust suurusest	27
9 Juhusliku funktsiooni mõiste. Diskreetne ja pidev juhuslik funktsioon.	28
9.1 Juhuslik protsess	30
9.2 Juhusliku protsessi jaotusseadus ja momendid	30
9.3 Statsionaarsed juhuslikud protsessid	31
9.4 Statsionaarse protsessi ergoodsus	32
10 Diskreetne Fourier' teisendus	32
11 Juhusliku protsessi spekter	37
12 Statistiline entroopia ja informatsioon	40
13 Juhuslike protsesside analüüsi meetodid	43
14 Spektraalse tiheduse hinnang	49

15	Statsionaarne juhuslik protsess ja lineaarne füüsikaline süsteem	54
16	Juhusliku funktsiooni filtreerimine	57
17	Mittestatsionaarsete protsesside analüüs	59
	Kirjandus	65

Eessõna

Juhuslike funktsioonide analüüsi alast kirjandust on saadaval rohkesti nii vene, saksa kui inglise keeles. Käesolev loengukonspekt on mõeldud abivahendiks geofüüsika osakonna vanemate kursuste üliõpilastele ja magistrandidele, et lihtsustada orienteerumist rohketes võõrkeelsetes monograafiates. Loengukonspektis käsitletakse valdavalt juhuslike protsesside teooria rakenduslikke aspekte, põhjalikuma teoreetilise tagapõhjaga ja pikemate tuletuskäikudega/tõestustega tutvumiseks juhatatakse sellekohaste monograafiate juurde. Selleks et paremini teavitada olulisemaid teooria lõike, on loengukonspekti lülitatud ka mõned ülesanded. Loengukursus eeldab diferentsiaal- ja integraalarvutuse tundmist. Kuigi juhuslike suuruste analüüsi ja Fourier' analüüsi põhitõed on lühidalt refereeritud, on nende ainevaldade eelnev läbitöötamine vägagi soovitatav.

Jaanuar 1996 Tõraveres

A. Kuusk

1 Juhuslikud suurused. Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon

Juhuslikkuse tekkeks on mitmeid võimalusi:

- juhuslikkus kui fundamentaalne loodusseadus
 - juhuslikkus kui sõltumatute põhjuslike ahelate ristumine
 - juhuslikkus kui informatsiooni puudus
 - juhuslikkus kui uurimismeetod
- (tahtlikult esile kutsutud: - MC
- hiir labürindis)

Näited:

- müüdi viskamine, trigger
- täring
- takistid kastis $10k \pm 5\%$

Juhuslike suuruste väärtuste hulka saab kirjeldada histogrammi, kumulatiivse histogrammi, jaotusfunktsiooniga.

Jaotusfunktsioon

ξ - juhuslik suurus

x - suvaline reaalarv

$$F(x) = P(\xi < x) \quad - \text{ jaotusfunktsioon} \quad (1)$$

Jaotusfunktsiooni omadused

Jaotusfunktsioon on monotoonne:

$$F(x_1) \leq F(x_2) \quad \text{kui} \quad x_1 < x_2 \quad (2)$$

$$F(-\infty) = \lim_{n \rightarrow -\infty} F(-n) = 0 \quad (3)$$

$$F(+\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 1 \quad (4)$$

Jaotusfunktsioon on vasakult pidev,

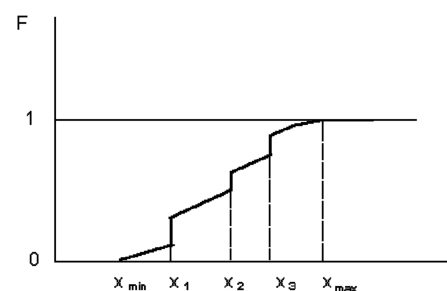
kui $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < x$,

siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(x) - F(x_n)) = 0 \quad (5)$$

Jaotusfunktsioonil saab olla ainult loenduv arv katkevusi (hüppeid).

Iga funktsioon, mis täidab tingimusi (2)–(5) on jaotusfunktsioon.



Jaotusfunktsioon võib olla ka funktsioon mitmest argumentist

$$F(x_1, x_2) = P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2) \quad (6)$$

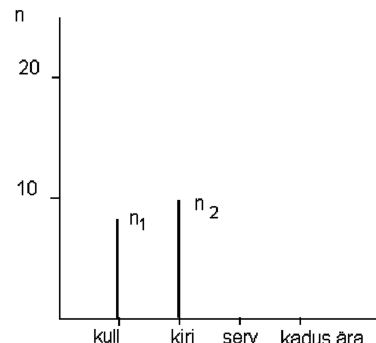
$$F(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) \quad (7)$$

(6): Browni liikumise projektsioon tasandile:

v_x, v_y ajahetkeil t_1, t_2, \dots, t_n

(7): Browni liikumine, $n = 3$.

Teine võimalus juhusliku suuruse kirjeldamiseks on histogramm.



Suhtelised sagedused:

$$p_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad p_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}. \quad (8)$$

Kui järjestada, siis

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k \quad (9)$$

Kui x_k hulk on pidev, siis

$$F(x) = \sum p_k \rightarrow \int_{-\infty}^x p(u) du \quad (10)$$

(10): – ξ on pidev juhuslik suurus,

(9), (10) – jaotustihedus.

Kui $F(x)$ on pidev ja diferentseeruv, siis on $p(x) = F'(x)$ **jaotustihedus**.

Jaotustiheduse omadused:

$$p(x) \geq 0 \quad (11)$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (12)$$

$$P(x \leq \xi < x + dx) = p(x) dx \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (14)$$

n -mõõtmeline jaotus:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \quad (15)$$

$$P((\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in G) = \int \int_G \dots \int p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (16)$$

2 Tõenäosus ja šanss. Juhusliku suuruse tõenäosustihedus

Tõenäosus – kui on tegemist massiliste sündmustega.

Kui üksiksündmus, siis šanss.

Šanss, et homme saab päikest võtta.

Tõenäosus, et järgmine päev pärast ilusat ilma on ka ilus.

Jaotusfunktsioon ja jaotustihedus võivad olla ainult konstateerivad. Tõenäosus ja tõenäosustihedus omavad ka prognoosivat tähendust; kasutatavad massiliste sündmuste puhul, eeldavad väga suurt ($n \rightarrow \infty$) sündmuste hulka,

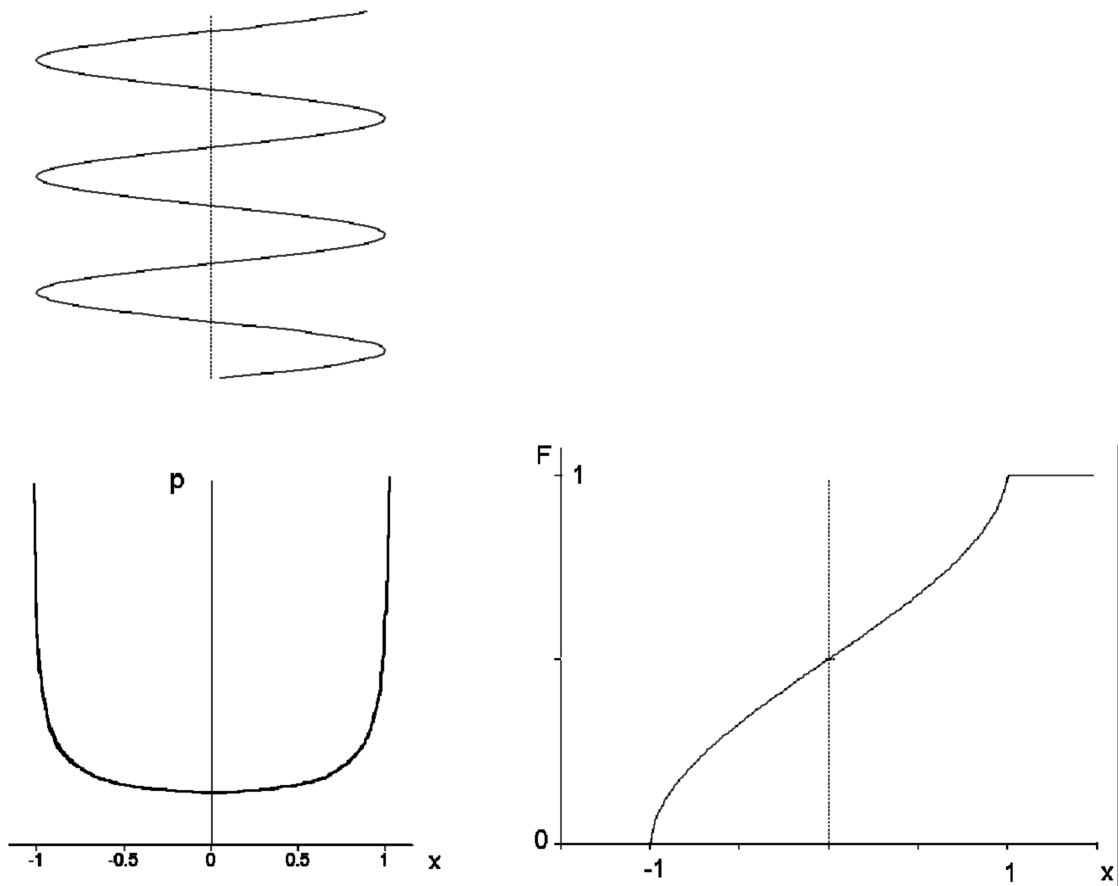
$$p_i = \lim_{\sum n_j \rightarrow \infty} \frac{n_i}{\sum n_j} \quad (1)$$

müüdi viskamine : $i = 1, 2$

täring : $i = 1, \dots, 6$

pidev suurus : $n_i: x_i \leq \xi < x_{i+1}$

Nii jaotusfunktsiooni, jaotustihedust kui tõenäosustihedust võib kasutada nii juhuslike kui ka deterni-
neeritud protsesside kirjeldamisel.



Ülesanded

1. Leida sinusoidi jaotustihedus ja jaotusfunktsioon.
2. Kui suur on tõenäosus leida takistite $10k \pm 5\%$ karbist takistit $10k$, $10 \pm 0.05k$?

3 Juhusliku suuruse momendid

Stieltjesi integraal

Olgu vahemikul (a, b) määratud funktsioon $f(x)$ ja monotoonselt kasvav tõkestatud variatsiooniga funktsioon $F(x)$, mis on vasakult pidev. Kui a, b on lõplikud, jagame (a, b) punktide jadaga $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ja moodustame summa

$$\sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})], \text{ kus } \tilde{x}_i \in (x_{i-1}, x_i). \quad (1)$$

Kui eksisteerib piirväärtus

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})], \quad (2)$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(x)$ Stieltjesi integraaliks integreeruva funktsiooniga $F(x)$,

$$J = \int_a^b f(x) dF(x). \quad (3)$$

NB! Oluline on otspunktide silmaspidamine!

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a). \quad (f(x) \equiv 1) \quad (4)$$

Kui $F(x)$ on jaotusfunktsioon - monotoonselt kasvav tõkestatud variatsiooniga funktsioon, siis

$$\int_a^b dF(x) = P(a \leq \xi < b), \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^b dF(x) = F(b) = P(\xi < b). \quad (6)$$

Kui $F(x)$ on mingi tavaline sile funktsioon, siis

$$dF(x) = F'(x)dx = p(x)dx$$

ja

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) p(x) dx, \quad (7)$$

aga tõenäosusteoorias ja juhuslike protsesside analüüsis on sagedased juhud, kus $F(x)$ omab katkevusi, astanguid. Neil kohtadel on $F'(x)$ lõpmatu, aga lõpmatud väärtused võivad olla erineva kaaluga: määramatused $F'(x)dx \rightarrow \infty \cdot 0$ annavad avamisel erinevaid väärtusi. Kui $F(x)$ -l on astang punktis $x = C$, siis

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dF(x) &= \lim \sum_{i=1}^k f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] + f(c)[F(x_{k+1}) - F(x_k)] + \\ &\quad + \lim \sum_{i=k+2}^n f(\tilde{x}_i) [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \\ &= \int_a^c f(x) dF(x) + \int_{c+0}^b f(x) dF(x) + f(c)[F(c+0) - F(c-0)]. \end{aligned}$$

Erijuhul, kui $F(x)$ on diskreetse suuruse jaotusfunktsioon, siis

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \sum_{n=1}^N f(c_n) [F(c_n + 0) - F(c_n - 0)]. \quad (8)$$

Stieltjesi integraal on Riemanni integraali üldistus. Stieltjesi integraali omadused on üldiselt samad, mis Riemanni integraalil, vt Gnedenko, article 25.

Juhusliku suuruse arvulised karakteristikud (Statistikud)

Keskväärtus (matemaatiline ootus)

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) && \text{-- Stieltjesi integraal} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Tähistatakse ka $M_1 \xi$, M_ξ , $E\xi$, μ_1 , $\langle \xi \rangle$, $\bar{\xi}$.

Diskreetse suuruse keskväärtus:

$$M\xi = \sum_i x_i p_i. \quad (10)$$

Keskväärtusel on kõik Stieltjesi integraali omadused:

- konstant,
- korrutamine konstandiga,
- summa, vahe, kaalutud summa.

n -järku moment

$$M_n = M(\xi^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x)$$

Tsentreeritud momendid

$$\mu_n = M((\xi - M\xi)^n).$$

$$\xi - M\xi = \xi - \langle \xi \rangle \quad \text{-- tsentreeritud suurus.}$$

Momentide omadused on kõik tuletatavad Stieltjesi integraali omadustest.

Kui on tegemist kahe juhusliku suurusega ξ ja η , mis omavad väärtusi x_i ja y_i , siis saab defineerida m - n -järku segamomendid

$$M_{mn} = M(\xi^m \eta^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^m y^n dF(x) dF(y).$$

Samal viisil defineeritakse tsentreeritud **segamomendid**.

Mõned tähtsamad momendid:

M_1 - keskväärtus

$$\mu_1 = M(\xi - \langle \xi \rangle) = 0$$

$\mu_2 = D\xi$ - dispersioon, variance

$\sqrt{\mu_2} = \sigma$ – standardhälve, ruutkeskmine hälve, sigma

$M_{11} = M_{xy}$ - korrelatsioonimoment

$r_{11} = r_{xy} = \frac{M_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ – **korrelatsioonikoeffitsient**, omab väärtusi vahemikus [-1, +1].

$r_{xy} = \pm 1$, kui x ja y on lineaarselt seotud.

Kui x, y on sõltumatud, siis $r_{xy} = 0$, aga $r_{xy} = 0 \nRightarrow$ sõltumatus,

r_{xy} – lineaarse seose mõõt.

Sageli vaadeldakse **normeeritud variatsiooniga tsentreeritud suurusi**.

$$\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} = \frac{\xi - \langle \xi \rangle}{\sigma_\xi}$$

ja **standardiseeritud tsentraalseid momente**

$$\eta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - M\xi}{\sigma_\xi} \right)^n p(x) dx :$$

$$\eta_2 = 1$$

$$\eta_3 = \mu_3/\sigma^3 - \text{asümmeetriakoeffitsient}$$

$$\eta_4 = \mu_4/\sigma^4 - \text{ekstsessikoeffitsient.}$$

Kasutatakse ka **variatsioonikoeffitsienti** σ_x/M_x .

Kui jaotuse tüüp on teada, siis on momentidega võimalik määrata jaotust üheselt. Vajalik momentide arv on jaotuse parameetrite arv. Üldjuhul ei ole jaotus määratud täisarvuliste momentidega.

Täiendavad jaotust iseloomustavad statistikud

mediaan: $F(m) \leq 1/2 \leq F(m+0)$
($F(m) = 0.5$)

p -järku **kvantiil** $F(x) = p$,
(mediaan – $p = 1/2$)

mood: $p(x_m) = \max(p(x))$ – kõige tõenäosem väärtus.

4 Fourier' teisendus

Tähistame $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ – s.t. $F(\omega)$ on $f(t)$ Fourier' teisenduseks,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

Inversiooni valem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Defineerime funktsiooni

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (3)$$

Asendades (1) \rightarrow (3), saame

$$\begin{aligned} f_{\sigma}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{\sin \sigma(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} f(t), \\ \text{kuivõrd} \quad &\frac{\sin \sigma(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} \quad \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \delta(t-\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Kasutades seoseid $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$, $F(\omega) = R(\omega) + i X(\omega)$, saab näidata, et kui $f(t)$ on reaalne, siis

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad (5)$$

ja

$$R(-\omega) = R(\omega), \quad X(-\omega) = -X(\omega), \quad (6)$$

seega

$$F^*(\omega) = F(-\omega). \quad (7)$$

Kui $f(-t) = f(t)$, siis $X(\omega) = 0$, ja

$$F(\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (8)$$

Samuti, kui $f(-t) = -f(t)$, siis

$$R(\omega) = 0 \text{ ja } F(\omega) = i X(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (9)$$

Sümmeetria

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega). \quad (10)$$

Tõestus: valemist (2) saame, et

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (11)$$

(võrdle valemiga (1)).

Kaasfunktsioonid

$$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega). \quad (12)$$

Kui $f(t)$ on reaalne, siis $f^*(t) = f(t)$, seega $F(\omega) = F^*(-\omega)$.

Skaleerimine (mastabeerimine).

Iga reaalse a korral

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (13)$$

Tõestus muutujate vahetusega integreerimisel definitsioonivalemis (1).

Nihe

Iga reaalse a korral

$$\begin{aligned} f(t - a) &\leftrightarrow e^{-ia\omega} F(\omega) \\ e^{iat} f(t) &\leftrightarrow F(\omega - a). \end{aligned} \quad (14)$$

Tõestus nagu eelmise (s.t. (13)) tõestus.

Modulatsioon

$$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [f(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]. \quad (15)$$

See jäeldub (14)-st, arvestades, et

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}).$$

Tuletised

$$\begin{aligned} (-it)^n f(t) &\leftrightarrow F^{(n)}(\omega) \\ F^{(n)}(t) &\leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega). \end{aligned} \quad (16)$$

Kontrolliks tuleb diferentseerida valemid (1) ja (2) ning paremal pool võtta tuletis integraali märgi all.

Konvolutsiooni teoreem (Sidumi teoreem)

Kui $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ ja $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, siis

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega), \quad (17)$$

kus

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad \text{on sidum.}$$

Definitsioonist (1) järgneb, et $f_1(t)f_2(t)$ Fourier teisendus on

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt \quad \rightarrow \quad t = \tau + x$$

ja vahetades integreerimisjärjekorra \Rightarrow

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega). \end{aligned}$$

NB! Rakendades inversioonivalemit (2) saame

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (18)$$

Samal viisil kui (17) saame ka

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega). \quad (19)$$

Parsevali valem

Kui

$$\begin{aligned} y_1(t) &\leftrightarrow Y_1(\omega) \\ y_2(t) &\leftrightarrow Y_2(\omega), \end{aligned}$$

siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(t) y_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(\omega) Y_2^*(\omega) d\omega. \quad (20)$$

Võttes (18)-s $t = 0$, saame

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(-\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) d\omega. \quad (21)$$

Kui $y_1(t) = f_1(t)$ ja $y_2^*(t) = f_2(-t)$, saame kaasvalemeid arvestades

$$Y_1(\omega) = F_1(\omega) \text{ ja } Y_2(\omega) = F_2^*(\omega).$$

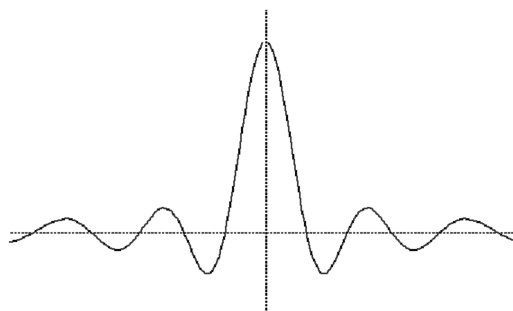
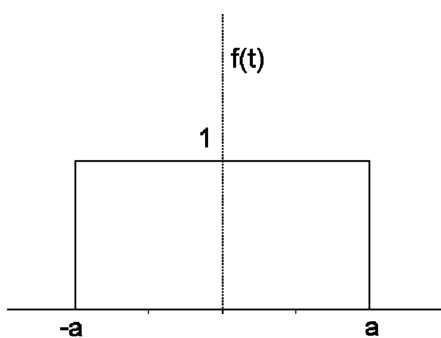
Energia teoreem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega. \quad (22)$$

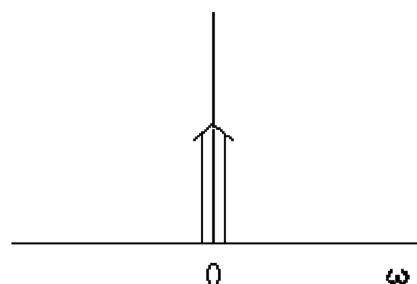
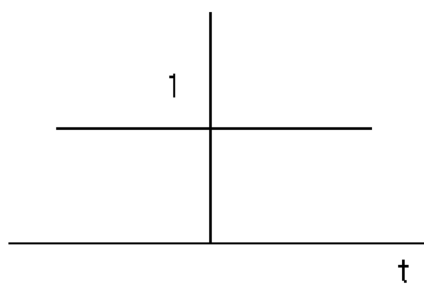
Selle saame (21)-st, kui $y_1(t) = y_2(t) = y(t)$.

Näited

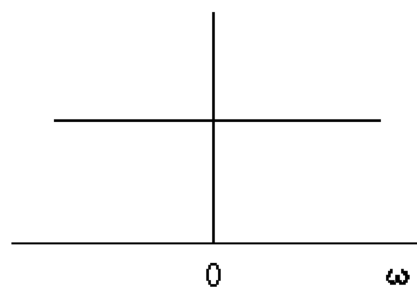
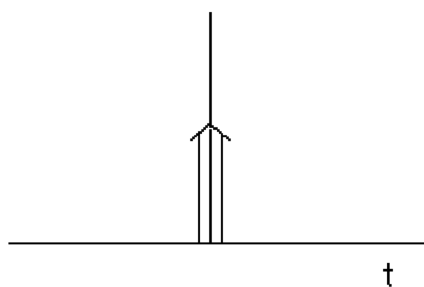
$$F(\omega) = \frac{2 \sin a \omega}{\omega}$$



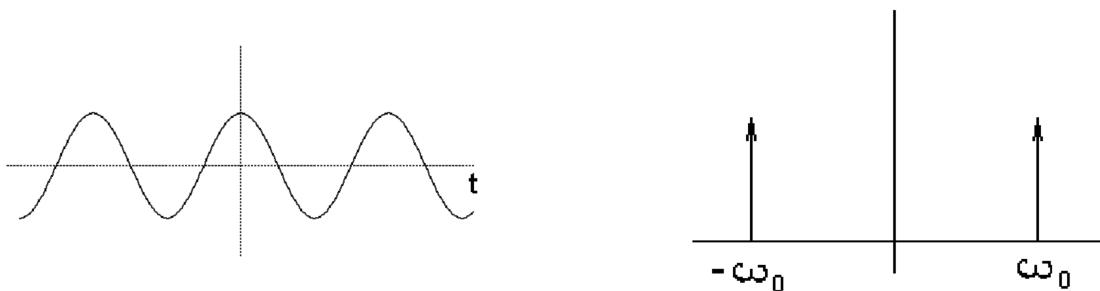
Kui $a \rightarrow \infty$, siis $f(t) \rightarrow c = 1$, $F(\omega) \rightarrow \delta(\omega)$



Kui $a \rightarrow 0$, siis $f(t) \rightarrow \delta(t)$, $F(\omega) \rightarrow \text{const}$

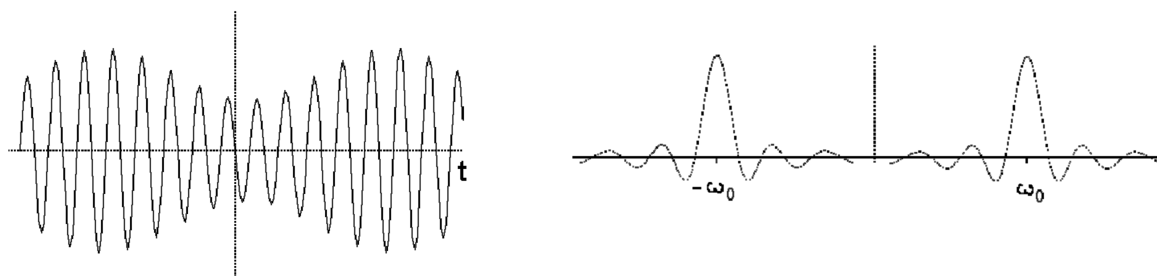


Harmoniline protsess



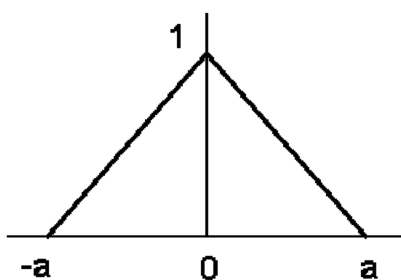
Modulatsioon

$$f(t) \cos \omega_0 t$$



Ülesanded

1. Leida funktsiooni



Fourier' teisendus.

2. Leida Gaussi funktsiooni $\exp(-ax^2)$ Fourier' teisendus.

Perioodilise funktsiooni Fourier' teisendus

Vaatleme suurst

$$\delta_N(t) = \sum_{n=-N}^N \delta(t + nT), \quad (23)$$

see on $2N + 1$ impulsiga kammfunktsioon. Niisuguse funktsiooni Fourier teisendus on

$$k_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N e^{inT\omega} = \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})T\omega]}{\sin(T\omega/2)}. \quad (24)$$

$k_N(\omega)$ on perioodiline perioodiga $\omega_0 = 2\pi/T$ ja

$$\int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} k_N(\omega) d\omega = \omega_0, \quad \text{sest} \quad \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} e^{inT\omega} d\omega = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \omega_0 & n = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Üldjuhul saab perioodilise funktsiooni esitada kujul

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N f_0(t + nT). \quad (26)$$

Kuivõrd $\delta(t - a) * f(t) = f(t - a)$, võime (26) esitada kujul

$$f_N(t) = \delta_N(t) * f_0(t), \quad (27)$$

kus $\delta_N(t)$ on määratud (23)-ga ja $f_0(t)$ on $f_N(t)$ üks periood.

Konvolutsiooniteoreemi põhjal

$$F_N(\omega) = F_0(\omega) k_N(\omega), \quad (28)$$

kus $f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$ ja $\delta_N(t) \leftrightarrow k_N(\omega)$.

Kui $N \rightarrow \infty$, siis

$$\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega), \quad (29)$$

kus $\bar{\delta}(t)$ ja $\bar{\delta}(\omega)$ on lõpmatud kammfunktsioonid,

$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT), \quad \bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\omega - n\omega_0). \quad (30)$$

$\bar{\delta}(t)$ on $\delta_N(t)$ piirfunktsioon $N \rightarrow \infty$,

$$k_N(\omega) \rightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega), \quad N \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Esitades perioodilise funktsiooni sidumina (27), $N \rightarrow \infty$, saame

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \omega_0 \bar{\delta}(\omega) F_0(\omega) = \omega_0 F_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0), \end{aligned} \quad (32)$$

s.t. perioodilise funktsiooni $f(t)$ Fourier' pööre koosneb impulsside jadast intervalliga $\omega_0 = 2\pi/T$.

Tähistades

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (33)$$

ja kasutades inversioonivalemit võrrandi (32) mõlemale poolele, saame tuttava perioodilise funktsiooni Fourier' rea

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (34)$$

kuna $\omega_0 \delta(\omega - n\omega_0)$ inversioon on

$$\frac{e^{in\omega_0 t}}{T}.$$

5 Karakteristlik funktsioon

Kasutades Fourier' teisendusega seotud matemaatilist aparati jõuame karakteristliku funktsiooni mõis-
teni,

$$f(t) = \int e^{itx} dF(x). \quad (1)$$

Kuna $|e^{itx}| = 1$, siis integraal (1) eksisteerib iga jaotuse $F(x)$ korral.

Omadused:

1° $f(0) = 1$

2° $|f(-t)| = f^*(t)$ – kaaskompleksfunktsioon

3° $|f(t)| \leq 1$, $-\infty < t < \infty$

kuivõrd $|Mz| \leq M|z|$ z - kompleksmuutuja

4° Bochner-Hintšini teoreem: Pidev funktsioon $f(t)$ on mingi juhusliku suuruse ξ karakteristlikuks funktsiooniks parajasti siis, kui

$f(0) = 1$

$f(t)$ – positiivselt määratud, st.

$$\sum_j^n \sum_k^n f(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0,$$

kus t_i – suvaline reaalarvude hulk,

z_i – suvaline kompleksarvude hulk,

n – naturaalarv.

5° $f_{a\xi+b}(t) = e^{ibt} f_\xi(at)$.

6° $f_{\xi+\eta}(t) = f_\xi(t) - f_\eta(t)$, kui ξ, η - sõltumatud.

7° Kui ξ -l on n -järku absoluutne moment, siis on karakteristlik funktsioon n korda diferentseeritav. Karakteristliku funktsiooni tuletised on lihtsalt seotud juhusliku suuruse momentidega.

8° Inversioonivalem seob karakteristliku funktsiooni ja jaotusfunktsiooni.

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f(t) dt.$$

(Tõestus lihtne, aga üsna pikk, vt Gnedenko; E. Tiit; või mõni teine aabits).

9° Jaotusfunktsioon on määratud karakteristliku funktsiooniga

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} f(t) dt.$$

Huvitav teada:

10° Sümmeetrilise jaotuse karakteristlik funktsioon on reaalne.

11° Kui eksisteerib jaotustihedus, siis

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t) dt.$$

12° Mitmemõõtmelise juhusliku suuruse karakteristik funktsioon:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int \dots \int (\exp i \sum_{k=1}^n t_k x_k) dF(x_1, \dots, x_n).$$

Ülesanded:

1° Kontrollida, kas leitud sinusoidi jaotustihedus ja jaotusfunktsioon on ikka tõesti jaotustihedus ja jaotusfunktsioon.

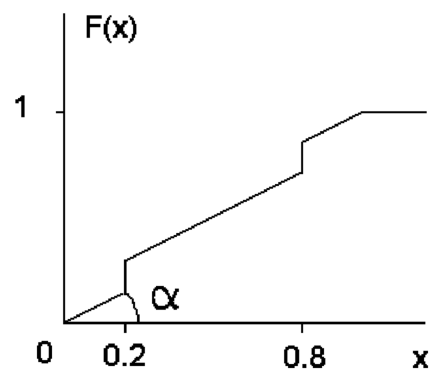
2° Arvutada integraal

$$\int_0^1 x^2 dF(x)$$

kui

$\tan \alpha = 0.5$,

astangute kõrgus on 0.1.



3° Kui suur on sõltumatute suuruste summa dispersioon?

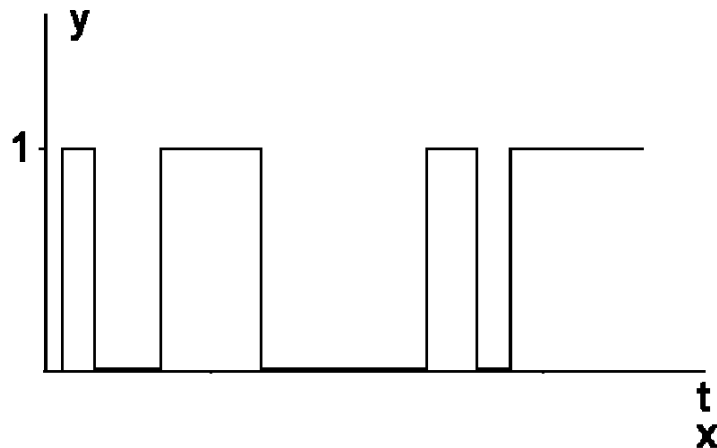
2°

$$\int_0^1 x^2 dF(x) = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{2} + 0.2^2 \cdot 0.1 + 0.8^2 \cdot 0.1 = \frac{1}{6} + 0.068$$

6 Diskreetsed jaotused

1° Bernoulli jaotus

Bernoulli jaotust omab Bernoulli katse, s.o. tõenäosuslik katse (juhuslik suurus), millel on 2 võimalikku väärtust x_1, x_2 – mündi viskamine, trigger, indikaatorfunktsioon.



p - soodsa tulemise (1-väärtuse) tõenäosus.

Väärtuste piirkond $x \in \{0, 1\}$

Jaotusfunktsioon $F(0) = 1 - p; F(1) = 1$

Jaotustihedus $p(0) = 1 - p; p(1) = p$

$$m_{\xi} = \sum_k x_k p_k = p$$

$$D_{\xi} = M(\xi - \langle \xi \rangle)^2 = \langle \xi^2 \rangle - 2p \langle \xi \rangle + p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Genereerimine:

kui η ühtlaselt jaotunud $[0,1]$ -l, siis

$$\xi : 1, p = \begin{cases} 1, & \eta \leq p \\ 0, & \eta > p \end{cases}$$

2° Binomialjaotus.

n sõltumatu Bernoulli katse korral on soodsate tulemuste arvul x binomialjaotus,

$\xi: n, p$ p – Bernoulli katse parameeter
 n – katsete arv

Jaotusfunktsioon

$$\sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad q = 1 - p$$

jaotustihedus

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

(ka tõenäosusfunktsioon diskreetse suuruse korral), kus

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad - \text{binoomkordajad (kombinatsioonide arv)}$$

Karakteristlik funktsioon on $(p \exp(it) + q)^n$.

$$m_\xi = np \quad - \text{keskväärtus}$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = npq \quad - \text{dispersioon, } \sigma^2$$

$$x_m : p(n+1) - 1 \leq x_m \leq pn + 1 \quad - \text{mood}$$

$$\gamma_a = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\theta - p}{\sqrt{npq}} \quad - \text{asümmeetriakoeffitsient}$$

$$\gamma_e = \frac{\mu_n}{\sigma^n} = 3 - \frac{\sigma}{n} + \frac{1}{npq} \quad - \text{ekstsessikoeffitsient}$$

$$\gamma_v = \sqrt{\frac{q}{np}} \quad - \text{variatsioonikoeffitsient}$$

Genereerimine definitsiooni kohaselt:

genereeritakse n sõltumatut arvu η lõigul $[0,1]$. $\eta < p$ kordade arv on $\xi: n, p$.

Binomiaaljaotus on lähtekohaks mitmele tuntud jaotusele:

kui $npq > 5$, $0.1 \leq p \leq 0.9$

või kui $npq > 25$, siis võib binomiaaljaotuse lähendada normaaljaotusega.

Seega $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ normaaljaotus.

Kui $p < 0.1$, siis Poissoni jaotus $m_\xi = np$.

3° Negatiivne binomiaaljaotus

$\xi: \chi, p$ χ - positiivne täisarv.

Väärtuste piirkond $0 \leq \xi < \infty$, ξ - täisarv 0-tulemuste arv Bernoulli katsetes parameetriga p kuni χ 1-tulemuseni.

$$\text{Jaotusfunktsioon} \quad \sum_{k=1}^y \binom{x+k-1}{k} p^\chi q^k \quad q = 1 - p$$

$$\text{Jaotustihedus} \quad \binom{x+y-1}{y} p^\chi q^y$$

$$\text{Karakteristlik funktsioon} \quad p^x [1 - q \exp(it)]^{-x}$$

$$m_\xi = \frac{\chi q}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{\chi q}{p^2}$$

$$\gamma_a = (1 + q)(xq)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_e = 3 + \frac{\sigma}{x} + \frac{p^2}{xq}$$

$$\gamma_v = (xq)^{-\frac{1}{2}}$$

Genereerimine: kui $\eta \in [0, 1]$ – ühtlaselt jaotatud, siis loendatakse

$$n_1 : \eta \leq p$$

$$n_2 : \eta > p$$

kui $n_1 = \chi$, siis n_2 - negatiivse binomiaaljaotusega.

4° Poissoni jaotus on binomiaaljaotuse piirjuht

$$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$$

Väärtuste piirkond $0 < x < \infty$, x - täisarv

$\lambda > 0$ - keskväärts.

$$\text{Jaotusfunktsioon} \quad \sum_{k=0}^x \lambda^k \frac{\exp(-\lambda)}{k!}$$

$$\text{Jaotustihedus} \quad \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}, \quad p(0) = \exp(-\lambda)$$
$$p(x+1) = \frac{\lambda p(x)}{x+1}$$

$$\text{Karakteristlik funktsioon} \quad \exp[\lambda(\exp(it) - 1)]$$

$$m_\xi = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\mu_3 = \lambda$$

$$\mu_r = \lambda \sum_{k=0}^{r-2} \binom{r-1}{k} \mu_k, \quad r > 1, \quad \mu_0 = 1$$

$$x_m = [\lambda] \quad - \text{täisosa} \quad - \text{mood}$$

$$= \lambda, \lambda - 1 \quad - \text{kui } \lambda - \text{täisarv}$$

$$\gamma_a = \lambda^{-1/2}$$

$$\gamma_e = 3 + 1/\lambda$$

$$\gamma_v = \lambda^{-1/2}$$

Genereerimine on keeruline.

Seos binomiaaljaotusega: $n \rightarrow \infty, n \rightarrow 0, np \rightarrow \lambda$

Kui $\lambda > 9$, siis \rightarrow normaaljaotus $m_\xi = \lambda$

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\sigma_\xi^2 < m_\xi \quad - \text{binomiaaljaotus}$$

$$\sigma_\xi^2 = m_\xi \quad - \text{Poissoni jaotus}$$

$$\sigma_\xi^2 > m_\xi \quad - \text{negatiivne binomiaaljaotus}$$

5° Ühtlane jaotus

$\xi : a, b$

Väärtuste piirkond $a \leq x \leq a + b - 1$
 $x - \text{täisarv}$

Jaotusfunktsioon $(x - a + 1)/b$
jaotustihedus $1/b$

karakteristlik funktsioon $\exp[it(a + \frac{1}{2}(b - 1))] \frac{\sin(bt/2)}{b} \cdot \sin \frac{t}{2}$

$$m_\xi = a + \frac{b - 1}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{b^2 - 1}{12}$$

$$\gamma_a = 0$$

Veel diskreetseid jaotusi

- geomeetriline jaotus
- Pascali jaotus
- hüpergeomeetriline jaotus
 - need kõik genereeritakse Bernoulli katsetega
- Polya jaotus
 - urnis kahte värvi kuulid
 - haiguste levik

7 Pidevad jaotused

1° Ühtlane jaotus

$\xi : a, b \quad [a = 0, b = 1]$

a – asukoha parameeter

b – mastaabi parameeter väärtused $\in [a, a + b]$

Jaotusfunktsioon $(x - a)/b$

jaotustihedus $1/b$

karakteristlik funktsioon

$$\frac{\exp(iat)[\exp(ib) - 1]}{ibt} = \frac{2 \exp[(a + b/2)it] sh(ib/2)}{ibt}$$

$$m_{xi} = a + b/2$$

$$\sigma^2 = b^2/12$$

$$x_m = a + b/2$$

$$\gamma_a = 0$$

$$\gamma_e = 9/5$$

$$\gamma_v = b / [\sqrt{3}(2a + b)]$$

Genereerimiseks on väga mitmeid algoritme, vt. Rabiner ja Gold ja kirjanduse viited seal. Sageli kasutatakse

$$x(n) = [A - x(n-1)] \pmod{p}, \quad \text{kus } A - \text{const} \\ p - \text{ suur algarv}$$

2° Eksponentsiaalne jaotus

$\xi : b$

väärtuste piirkond $[0, \infty)$

b – mastaabi parameeter, sageli kasutatakse ka $\lambda = 1/b$

Jaotusfunktsioon $1 - \exp(-x/b)$

jaotustihedus $1/b \exp(-x/b) = \lambda \exp(-\lambda k)$

karakteristlik funktsioon $1/(1 - ibt)$

$$m_\xi = b = 1/\lambda$$

$$\sigma^2 = b^2$$

$$x_m = 0$$

$$\text{mediaan} = b \ln 2$$

$$\gamma_a = 2$$

$$\gamma_e = 9$$

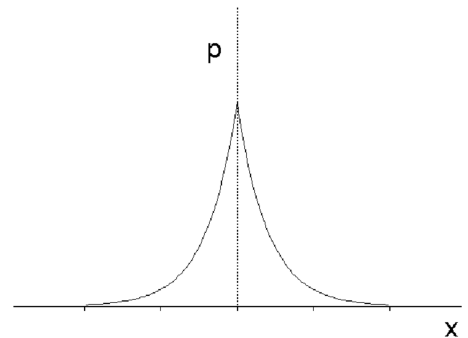
$$\gamma_v = 1$$

Genereerimine: $\eta \in [0, 1]$ – ühtlane jaotus

$\xi = b \log \eta$ – eksponentsiaalne jaotus

Kasutatakse ka kahepoolset eksponentsiaalset jaotust

väärtuste piirkond $(-\infty, \infty)$



3° Gaussi jaotus (normaaljaotus)

$\xi : \mu, \sigma$

väärtused $(-\infty, \infty)$

μ – asukoha parameeter

σ – mastaabi parameeter

Tõenäosustihedus

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

Jaotusfunktsioon

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad - \text{Laplace'i funktsioon (tõenäosusintegraal)}$$

Karakteristlik funktsioon $\exp(i\mu t - 1/2 \sigma^2 t^2)$

$$m_\xi = \mu$$

$$\sigma_\xi^2 = \sigma^2$$

$$x_m = \mu \quad - \text{mood}$$

$$x = \mu \quad - \text{mediaan}$$

Standardiseeritud r -järku tsentraalne moment $= 0$ r - paaritu

$$= \frac{r!}{2^{r/2} [(r/2)!]} \quad r - \text{paaris}$$

$$\gamma_a = 0$$

$$\gamma_e = 3$$

Normaaljaotus on sõltumatute ühesuguse jaotusega juhuslike arvude summal kui $N \rightarrow \infty$: tsentraalne piirteoreem. Seda omadust kasutatakse ka normaaljaotusega juhusliku suuruse genereerimiseks (aega-viitev!). Ei ole ühte head lihtsat moodust genereerimiseks. Normaaljaotus on mitme tuntud jaotuse piirjuhuku: Poissoni jaotus $\lambda > 9$.

Kui η_i - sõltumatud normaaljaotusega,

$$\text{siis } \sum \eta_i : \langle \xi \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i$$

$$\sigma_\xi^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2$$

n sõltumatu normaaljaotusega $\mu = 0$, $\sigma = 1$ juhusliku suuruse ruutude summal on χ^2 -jaotus n vabadusastmega.

4° Lognormaalne jaotus

ξ : m, σ

väärtused $\in [0, \infty)$

m - mastaabi parameeter - mediaan, kasutatakse ka $\mu = \ln m$

$\sigma > 0$ - kaju parameeter, σ : $\ln \xi$ standardhälve, kasutatakse ka $w = \exp(\sigma^2)$

jaotustihedus

$$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x/m))^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$m_\xi = m \sqrt{w}$$

$$\sigma^2 = m^2 w (w - 1)$$

$$\xi_m = m/w$$

$$\gamma_a = (w + 2) \sqrt{(w - 1)}$$

$$\gamma_e = w^4 + 2w^3 + 3w^2 - 3$$

$$\gamma_v = \sqrt{w - 1}$$

Kui normaaljaotus oli sõltumatute juhuslike suuruste summa piirjaotuseks, siis lognormaaljaotus on korrutise piirjaotuseks.

5° Gamma jaotus (Γ -jaotus)

Kahe-parameetiline väga universaalne ja paindlik jaotus

$$\xi : b, c$$

väärtuste piirkond $0 \leq x < \infty$

b – mastaabi parameeter, $b > 0$

c – kuju parameeter, $c > 0$

Jaotustihedus

$$\frac{(x/b)^{c-1} [\exp(-x/b)]}{b \Gamma(c)},$$

kus

$$\Gamma(c) = \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{c-1} du \quad - \Gamma\text{-funktsioon}$$

Jaotusfunktsioon täisarvulise c korral (Erlangi jaotus)

$$1 - [\exp(-x/b)] \left[\sum_{k=0}^{c-1} (x/b)^k / k! \right]$$

karakteristlik funktsioon $(1 - ibt)^{-c}$

$$m_\xi = bc$$

$$\sigma^2 = b^2 c$$

mood $b(c - 1) \quad c \geq 1$

$$\gamma_a = 2c^{-1/2}$$

$$\gamma_e = 3 + b/c$$

$$\gamma_v = c^{-1/2}$$

$c = 1 \Rightarrow$ eksponentsiaaljaotus

c – täisarv – Erlangi jaotus

$2c$ – täisarv – χ^2 -jaotus

6° Beeta-jaotus (β -jaotus)

Väärtuste piirkond $0 \leq x \leq 1$

Jaotustihedus

$$p(x) = \frac{x^{v-1}(1-x)^{w-1}}{B(v, w)},$$

kus

$$\begin{aligned} B(v, w) &= \int_0^1 u^{v-1}(1-u)^{w-1} du \\ &= \frac{\Gamma(v)\Gamma(w)}{\Gamma(v+w)} \quad - \beta\text{-funktsioon} \end{aligned}$$

$$m_\xi = v/(v+w)$$

$$\sigma^2 = vw / (v+w)^2(v+w+1)$$

$$\text{mood} = (v-1) / (v+w-2) \quad v > 1, w > 1$$

Kui $v = w = 1/2$, siis $F(x) = 1/2\pi \arcsin \sqrt{x}$

7° χ^2 -jaotus

Väärtuste piirkond $0 \leq x < \infty$

Jaotustihedus

$$p(x) = \frac{x^{(v-2)/2} \exp(-x/2)}{2^{v/2} \Gamma(v/2)}$$

$$m_\xi = v$$

$$\sigma^2 = 2v$$

χ^2 -jaotus on v sõltumatu normaaljaotusega $m_x = 0, \sigma^2 = 1$ ruutude summa jaotus,

üldjuhul

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a)^2 \quad \text{omab } \chi^2\text{-jaotust}$$

Kui $\xi = \chi/\sqrt{n}$, siis jaotusfunktsioon $F(y) = 0, \xi < 0$;

$$\sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 = y^2 n \sigma^2 \quad - \text{ker, millesse sattumise tõenäosus on } F(y), y > 0,$$

$$\begin{aligned} F(y) &= \int \dots \int_{\sum_i x_i^2 < y_n^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left(-\sum \frac{x_i^2}{2}\right) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \frac{1}{2^{n/2-1}} \Gamma(n/2) \int_0^{y\sqrt{n}} \rho^{n-1} e^{-\rho^2/2} d\rho, \\ p(y) &= \frac{\sqrt{2n}}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} e^{-ny^2/2}. \end{aligned}$$

Kui $n = 1$, siis $p(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2}$ - Gaussi jaotus

Kui $n = 3$, siis $p(y) = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} y^2 e^{-3y^2/2}$ – Maxwelli jaotus =
= molekulide kiiruste absoluutväärtuste jaotus

χ^2 - jaotus on väga levinud statistikas, χ^2 kriteeriumiga kontrollitakse juhusliku suuruse allumist mingile etteantud jaotusele.

8° Studenti t-jaotus

Väärtuste piirkond $(-\infty, \infty)$,

v – kuju parameeter – positiivne täisarv = vabadusastmete arv

$$p(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{v+1}{2}\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{x^2}{v}\right)\right]^{-\frac{v+1}{2}}}{\sqrt{\pi v} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$m_\xi = 0$$

$$\sigma^2 = v/(v-2) \quad v > 2$$

$$\text{mood} = 0$$

$$\gamma_a = 0$$

$$\gamma_e = 0$$

v kasvades $T : v \rightarrow$ Gaussi jaotus.

Kasutatakse statistikas keksväärtuse kontrollimisel,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad \text{omab t-jaotust.}$$

9° Fisheri F-jaotus (dispersioonide suhte jaotus)

$F : v, w$

Väärtuste piirkond $0 \leq x < \infty$

Tõenäosustihedus

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+w}{2}\right) \left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{v}{2}} x^{\frac{v-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{w}{2}\right) \left[1 + \frac{v}{w}x\right]^{\frac{v+w}{2}}},$$

v, w – positiivsed täisarvud – vabadusastmete arvud – kujuparameetrid.

F -jaotust kasutatakse dispersioonide kokkulangevuse kontrolliks:

keskväärtuste võrdlemiseks kasutatakse nende vahet $T = k(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$,

dispersioonide võrdlemiseks suhet $F = s_1^2/s_2^2$.

8 Funktsioon juhuslikust suurusest

$$\eta = f(\xi), \quad \eta_i = f_i(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Jaotusfunktsioon

$$\Phi(y_1, \dots, y_n) = \int \int_D p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

kus D määratakse tingimusega $f_i(x_1, \dots, x_n) < y_i \quad i = 1, \dots, k$.

Olgu $h = h(x)$ ühene funktsioon, siis pöördfunktsioon on $x = x(h)$.

$$p(x) dx = P[x \leq X \leq x + dx] \quad - \text{tõenäosus} \quad (1)$$

$$g(h) dh = P[h \leq H \leq h + dh] \quad - \text{tõenäosus} \quad (2)$$

$$p(x) = p(x(h))$$

$$dx = (dx(h)/dh) dh, \quad \text{seega}$$

$$p(x) dx = p(x(h)) \left| \frac{dx(h)}{dh} \right| dh \quad - \text{absoluutväärtus, sest tõenäosus} \geq 0 \quad (3)$$

Võrreldes (3) (2)-ga, saame

$$g(h) = p(x(h)) \left| \frac{dx(h)}{dh} \right|.$$

Ülesanne 1.-1.:

$h(x) = \cos x$, x jaotunud ühtlaselt lõigul $[0, \pi]$, jaotustihedus $= 1/\pi$

$$x(h) = \arccos h$$

$$\left| \frac{dx(h)}{dh} \right| = \left| \frac{d \arccos h}{dh} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$g(h) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \right|, \quad h \in [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^1 g(h) dh = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dh}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dh}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{2\pi}{2\pi \sin(\pi/2)} = 1$$

$$G(x) = \int_{-1}^x \frac{dh}{\pi \sqrt{1-h^2}}$$

Kui on mitmene funktsioon, siis

$$g(h) dh = p(x_1) \left| \frac{dx_1}{dh} \right| dh + p(x_2) \left| \frac{dx_2}{dh} \right| dh + \dots + p(x_m) \left| \frac{dx_m}{dh} \right| dh.$$

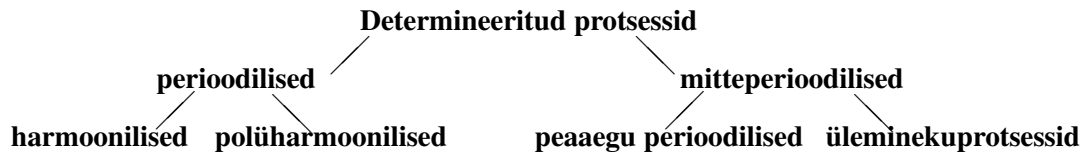
Ülesanne :

$h(x) = \cos x$, x jaotunud ühtlaselt $[0, 2\pi]$, leida $g(h)$

9 Juhusliku funktsiooni mõiste.

Diskreetne ja pidev juhuslik funktsioon.

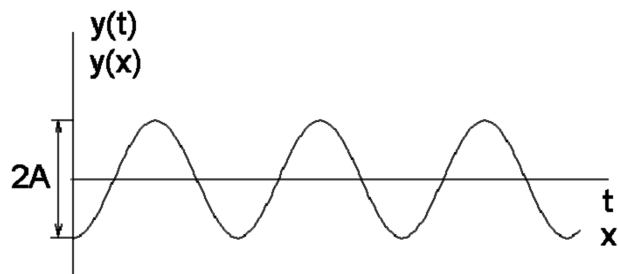
Determineeritud protsesside klassifikatsioon:



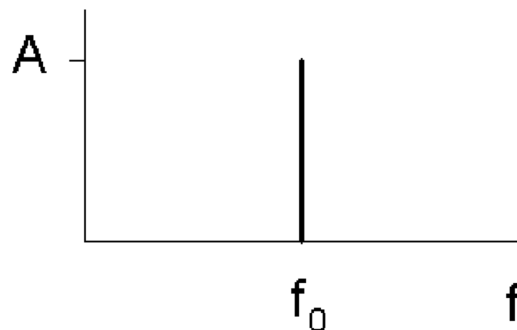
Harmoniline protsess

$$y(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \Theta)$$

$$y(x) = A \sin(2\pi f_0 x + \Theta)$$



Selle protsessi spektr



Polüharmoniline protsess

$$y(t) = y(t \pm nT_p) \quad n = 1, 2, \dots$$

See protsess on esitatav Fourier' reana

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t),$$

kus $f_1 = 1/T_p$,

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} y(t) \cos 2\pi n f_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} y(t) \sin 2\pi n f_1 t dt.$$

Peaaegu harmooniline protsess

$$y(t) = \sum_n A_n \sin(2\pi f_n t + \Theta_n),$$

kus f_n / f_m ei pruugi olla ratsionaalarvud.

Üleminekuprotsessid

$$y(t) = \begin{cases} A e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} A e^{-at} \cos bt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} a & t \in [0, C] \\ 0 & t \notin [0, C] \end{cases}$$

Üleminekuprotsessi spekter

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad -$$

– reeglina eksisteerib ja on pidev.

Juhuslikud protsessid

statsionaarsed

mittestatsionaarsed

ergoodsed

mitteergoodsed

Sõltumatu klassifikatsioon:

- diskreetsed
- pidevad.

Mõõtmistulemused on enamikel juhtudel ajas/ruumis diskreetsed, protsessid ise on pigem pidevad, s.t. protsess on määratud igal ajahetkel ja igas ruumipunktis.

Protsess võib olla diskreetne ka väärtuste ruumis.

Juhuslike protsesside näited:

- radioaktiivne lagunemine
- mere lainetus.

Üleskirjutus transektil annab realisatsiooni, valiku, valimi. Kogu võimalike realisatsioonide hulk moodustab ansambli.

Kõik statistikud, mida kasutatakse juhuslike protsesside kirjeldamiseks, on oma loomult keskmised. Keskmiste leidmiseks on kaks võimalust

- keskmine üle ansambli
- keskmine ajas/ruumis.

9.1 Juhuslik protsess

Kui meil on teada väärtused $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$, siis püüame hinnata väärtust

$$x_{t+\alpha} = \sum_{s=0}^{\alpha} k_s x_{t-s}.$$

Lineaarne vähimruutudega hinnang on defineeritud tingimusega, et

$$\sigma_{\alpha}^2 = M[(x_{t+\alpha} - \langle x_{t+\alpha} \rangle)^2] \quad \text{on minimaalne.}$$

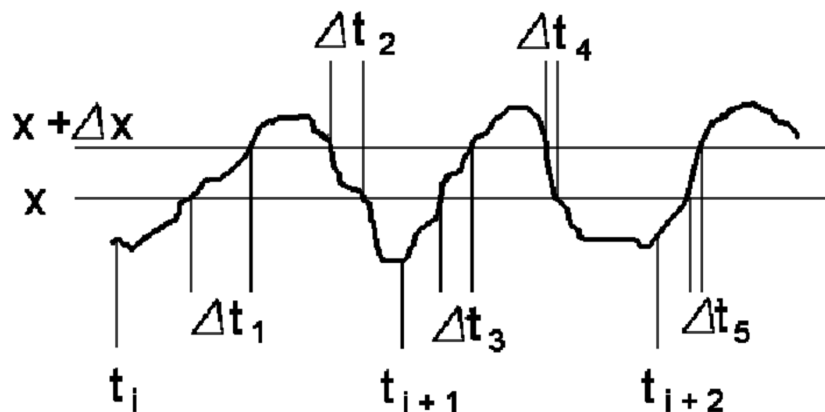
Protsess on deterministlik, kui $\sigma_1^2 = 0$;

protsess on juhuslik, kui $\sigma_1^2 > 0$.

9.2 Juhusliku protsessi jaotusseadus ja momendid

Juhusliku protsessi väärtused (väärtuste hulk) ajahetkel $t_1 \dots t_N$ on juhuslik suurus, mis omab jaotusseadust ja momente nagu iga teine juhuslik suurus.

Juhusliku protsessi jaotustihedus on piirjaotustihedus $N \rightarrow \infty$, kusjuures on tingimata vajalik, et $\Delta t = t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$ (kui ei ole ajas/ruumis diskreetne protsess).



$$P(x \leq x(t) < x + \Delta x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T}$$

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq x(t) < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T_x}{\Delta x} \right) \quad \text{-- jaotustihedus}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt \quad \text{-- jaotusfunktsioon}$$

Statistikud leitakse nagu juhusliku suuruse korral

$$m_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx,$$

$$M_2 = M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx,$$

tsentraalsed momendid

$$\mu_n = M((\xi - M(\xi))^n),$$

standardiseeritud tsentraalsed momendid

$$\eta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - m_\xi}{\sigma_\xi} \right)^n p(x) dx.$$

Kui on kaks protsessi $\xi(t)$ ja $\eta(t)$, siis saame leida segamomendid

$$M_{mn} = M(\xi^m \eta^n) = \int \int_{-\infty}^{\infty} x^m y^n dF(x)dF(y) = \int \int x^m y^n p(x, y) dx dy.$$

Juhusliku protsessi korral tekib uus võimalus: $\eta(t)$ on seesama protsess $\xi(t)$ mingil teisel ajahetkel: $\eta(t) = \xi(t + \tau)$, siis segamoment

$$R_\xi(t, t + \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt$$

on autokorrelatsioonifunktsioon.

Kasutatakse ka nimetusi:

- autokorrelatsioonimoment
- kovariatsioon
- normeeritud autokorrelatsioonifunktsioon
- korrelatsioonikoefitsient.

Kui ξ ja η on erinevad funktsioonid, siis 1.-järku segamoment $R_{\xi\eta}$ on vastastikuse korrelatsiooni funktsioon.

9.3 Statsionaarsed juhuslikud protsessid

Olgu vaatluslik aegrida (juhuslik protsess)

$$x_t, t \in (-\infty, \infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1 \\ x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \text{realisatsioonid}$$

$$\text{Keskvärtus} \quad m_\xi = M(x_t) \tag{1}$$

$$\text{korrelatsioonimoment} \quad K(\tau) = M(x_{t+\tau} x_t). \tag{2}$$

Kui (1) ja (2) on funktsioonid ajast t , siis on tegu mittestatsionaarse protsessiga. Kui m_ξ ja $K(\tau)$ ei sõltu t -st, siis on nõrgalt statsionaarne protsess (statsionaarne laias mõttes). Kui kõik momendid ei olene ajast, siis rangelt statsionaarne e. statsionaarne kitsas mõttes.

Kui on tegemist ühe realisatsiooniga, siis saab rääkida protsessi seesmist statsionaarsusest: kui protsessi statistikud, mis on määratud osalõikudel, ei muutu ajas, siis on protsess statsionaarne.

NB! Probleem $\mu_i = \mu_k$ võrdsusest, kasutusele tulevad statistilise hindamise kriteeriumid:

- keskväärtuste võrdsus t -jaotusega
- jaotustihedus χ^2 -jaotusega
- dispersioonid F -jaotusega

9.4 Statsionaarse protsessi ergoodsus

Eelnevates näidetes oli kahesuguseid keskmisi

- keskmised üle ansambli
- keskmised ajas – ühe realisatsiooni ulatuses.

Niisuguseid protsesse, kus keskmised üle ansambli langevad kokku keskmistega ajas, nimetatakse **ergoodseteks**.

10 Diskreetne Fourier' teisendus

Vaatleme perioodilist funktsiooni

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}. \quad (1)$$

Suvalise N ja $T_1 = T/N$ korral on väärtused $y(mT_1)$ antavad kujul

$$y(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 mT_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w_N^{km}, \quad w_N = e^{\frac{i2\pi}{N}}, \quad (2)$$

kus w_N on N -s juur 1-st.

Täisarvu k saab esitada summana

$$\begin{aligned} k &= n + r & n &= 0, \dots, N-1, \\ & & r &= \dots, -1, 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Valemist (2) järeldub

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} w_N^{(n+rN)m} = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{mn} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN},$$

sest $w_N^N = 1$, $w_N^{km} = w_N^{(n+rN)m} = w_N^{mn}$.

Defineerides uued koefitsiendid

$$\bar{c}_n = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}, \quad (4)$$

saame

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n w_N^{mn} \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (5)$$

Samuti saab näidata, et kui

$$\bar{f}(t) = \sum_n f(t + nT) \quad \text{ja} \quad \bar{F}(\omega) = \sum_n F(\omega + n\omega_1), \quad (6)$$

kus $\omega_1 = 2\pi/T_1 = N\omega_0$, siis

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{mn}, \quad (7)$$

kus $w_N = e^{i2\pi/N}$.

Valem (7) on N võrrandiga süsteem ($m = 0, \dots, N-1$), mis lubab leida spektri "lugemid" $\bar{F}(n\omega_0)$, kui on teada funktsiooni lugemid $\bar{f}(mT_1)$. **NB!** Üldjuhul ei ole $F(n\omega_0)$ määratav $\bar{F}(n\omega_0)$ kaudu. Et oleks, peavad olema täidetud mõned kitsendused $F(n\omega_0)$ kahanemiskiiruse kohta. Vahe $F(n\omega_0) - \bar{F}(n\omega_0)$ on intermodulatsiooni viga (aliasing).

Kasutame lihtsamaid tähistusi

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (8)$$

$$w_N = e^{i2\pi/N}$$

Süsteemi (8) lahendiks on

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (9)$$

Tõestus: Suvalise fikseeritud n korral muudame (8)-s indeksi $n \rightarrow k$, korrutame m -nda võrrandi w_N^{-mn} -ga ja summeerime 0-st $N-1$ -ni:

$$\sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} = \sum_{m=0}^{N-1} w_N^{-mn} \sum_{k=0}^{N-1} a_k w_N^{mk} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{m=0}^{N-1} w_N^{m(k-n)}. \quad (10)$$

Viimane summa on geomeetriline progressioon suhtega $w_N^{(k-n)}$, seega

$$\sum_{m=0}^{N-1} w_N^{m(k-n)} = \frac{w_N^{N(k-n)} - 1}{w_N^{(k-n)} - 1} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ N & k = n \end{cases}$$

Järelikult (8) ja (9) defineerivad üks-ühese vastavuse arvuhulkade $\{a_n\}$ ja $\{A_m\}$ vahel, tähistame seda vastavust

$$a_n \underset{N}{\leftrightarrow} A_m \quad (11)$$

Hulgad $\{a_n\}$ ja $\{A_m\}$ moodustavad N -järku diskreetse Fourier' ridade paari (DFS).

Perioodilisus. Kui (8) ja (9) peavad paika iga m ja n korral, siis jaded A_m ja a_n on perioodilised:

$$A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n, \quad (12)$$

sest $w_N^{\pm(m+N)n} = w_N^{\pm mn}$.

Perioodilisusest järeldub, et võime summeerimisradasid sünkroonselt nihutada,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow n_1 \\ N-1 &\rightarrow n_1 + N - 1. \end{aligned}$$

Kui $N = 2M + 1$, siis $n_1 = -M$ korral

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{n=-M}^M a_n w_N^{mn} \\ a_n &= \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M A_m w_N^{-mn} \end{aligned} \quad (13)$$

DFS omadused

$$a_{-n} = a_{N-n}, \quad A_{-m} = A_{N-m} \quad (14)$$

$$a_{-n}^* \stackrel{\leftrightarrow}{N} A_m^* \quad (15)$$

(15) saadakse definitsioonivalemeist, kasutades seost $w_N = w_N^{-1}$.

Samal viisil saadakse

$$a_{-n} \stackrel{\leftrightarrow}{N} A_{-m}. \quad (16)$$

Kui a_n on reaalarvud, siis $a_{-n}^+ = a_{-n}$,
seega

$$A_{m^*} = A_{-m}, \quad (17)$$

ja kuna $A_{-m} = A_{N-m}$, siis teades A_m , $m = 0, \dots, N/2$, saame leida A_m iga m jaoks.

Kui on kaks jada

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{\leftrightarrow}{N} A_m \\ b_n &\stackrel{\leftrightarrow}{N} B_m \end{aligned}$$

ja

$$a_n + ib_n \stackrel{\leftrightarrow}{N} C_m,$$

siis

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{2}(C_m + C_{N-m}^*) \\ B_m &= \frac{1}{2i}(C_m - C_{N-m}^*) \end{aligned} \quad (18)$$

seega kahe reaalse diskreetse Fourier' teisenduse (DFT) asemel võib teha ühe kompleksmuutujate teisenduse, DFT.

Konvolutsiooniteoreem

Kui

$$a_n \stackrel{\leftrightarrow}{N} A_m \quad \text{ja} \quad b_n \stackrel{\leftrightarrow}{N} B_m$$

siis

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{n-k} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m B_m w_N^{-mn} \quad (19)$$

See on Fourier' integraali diskreetne analoog. Tõestamiseks tuleb (19) asendada definitsioonivalemiga ja kasutada DFS perioodilisust ja summeerimisradade sünkroonset muutumist.

Nihe

Kui

$$b_n \stackrel{\leftrightarrow}{N} B_m, \quad \text{siis} \quad b_{n-k} \stackrel{\leftrightarrow}{N} w_N^{mk} B_m, \quad (20)$$

sest

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_{n-k} w_N^{mn} = w_N^{mk} \sum_{r=-k}^{N-1-k} b_r w_N^{mr},$$

kus $n - k = r$.

Parsevali valem

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^* = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m B_m^* \quad (21)$$

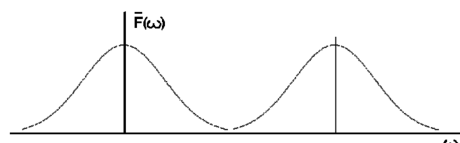
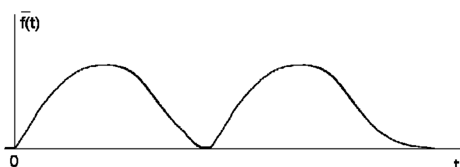
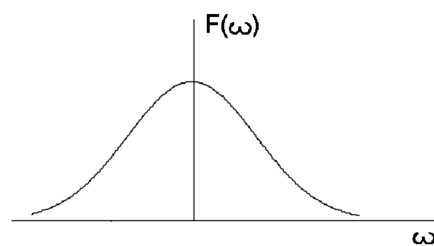
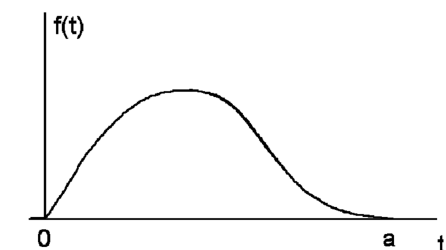
Energia teoreem

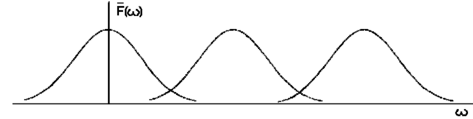
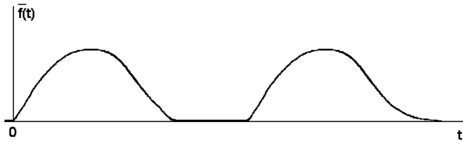
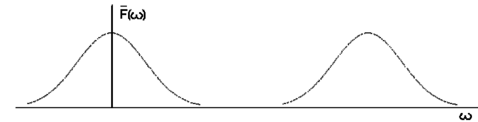
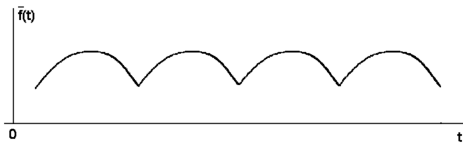
Kui (21)-s $a_k = b_k$, siis

$$\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |A_m|^2. \quad (22)$$

Vaatleme DFS paari (7)

$$\frac{1}{T} \bar{F}(n \omega_0) \stackrel{\leftrightarrow}{N} \bar{f}(m T_1)$$





Kiire Fourier' teisendus (FFT)

Seose (8) arvutamiseks

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn} \quad (8)$$

on vaja teha $N-1$ korrutamist iga A_m ($m > 0$) jaoks, seega kokku on vaja teha $(N-1)^2$ korrutamist.

Kui DFS järk on paarisarv $2N$, siis

$$a_N \leftrightarrow_N A_m \quad (23)$$

saab taandada kahe komplekti N -järku DFS arvutamiseks

$$b_n \leftrightarrow_N B_m \quad c_n \leftrightarrow_N C_m$$

Kui

$$b_n = a_{2n} \quad c_n = a_{2n+1}, \quad (24)$$

siis iga m korral

$$A_m = B_m + w_{2N}^m C_m. \quad (25)$$

Tõestus

Asendades (8)-s N -i $2N$ -ga, saame

$$A_m = \sum_{n=0}^{2N-1} a_n w_{2N}^{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k w_{2N}^{2km} + \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k+1} w_{2N}^{(2k+1)m}.$$

Kuna

$$w_{2N}^{2km} = w_N^{km} \quad ja \quad w_{2N}^{(2k+1)m} = w_N^{km} w_{2N}^m,$$

siis

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k} w_{2N}^{2km} &= \sum_{k=0}^{N-1} b_k w_N^{km} = B_m \\ \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k+1} w_{2N}^{(2k+1)m} &= w_{2N}^m \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_N^{km} = w_{2N}^m C_m. \end{aligned}$$

Seega on (25) tõestatud.

Et leida B_m ja C_m , on vaja $2(N-1)^2$ korrutamist, seega A_m leidmiseks valemi (25) abil $2(N-1)^2 + 2N - 1$ korrutamist. Täiendav lihtsus tuleneb sellest, et

$$B_{m+N} = B_m, \quad C_{m+N} = C_m, \quad w_{2N}^{m+N} = -w_{2N}^m, \quad (26)$$

seega

$$A_{m+N} = B_m - w_{2N}^m C_m. \quad (27)$$

Kui $N = 2^s$, siis saab seda protseduuri s korda korrata. Nii saadakse ühest liikmest koosnev rida, mille Fourier' teisenduseks on tema ise. Kokkuvõttes on $N = 2^s$ järku Fourier' teisenduseks vaja teha $(N/2) \log_2 N$ korrutamist.

11 Juhusliku protsessi spekter

Fourier' teisendus statsionaarsest juhuslikust protsessist

$$X_1(\omega) = \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt$$

üldjuhul ei koonu kui $T \rightarrow \infty$, koonduva funktsiooni saamiseks jagame läbi $2T$ -ga (intervalli pikkusega),

$$X(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

Kui $x(t)$ on reaalne, siis võime ta inversioonivalemi põhjal esitada kujul

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Juhusliku funktsiooni $x(t)$ Fourier' spekter $X(\omega)$ on samuti juhuslik funktsioon.

Leiame protsessi $x(t)$ keskmise energia, s.t. dispersiooni, spektraalse esituse kaudu,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(x^2(t)) & \stackrel{(2)}{=} \mathbf{M}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(g) e^{igt} dy\right) = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}(X^*(\omega) X(g)) e^{i(g-\omega)t} dg d\omega = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 e^{i(g-\omega)t} dg d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

kus

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (4)$$

on oma loomult jaotustihedus, näitab energia jaotust sageduste järgi, nimetatakse võimsuse spektraalseks tiheduseks.

Et (3) kehtiks, on vaja, et

$$\mathbf{M}(X^*(\omega)X(g)) = 2\pi S(\omega) \delta(\omega - g). \quad (5)$$

Punktis 8 defineerisime autokorrelatsioonifunktsiooni

$$R_x(t, t + \tau) = \mathbf{M}(x(t)x(t + \tau)). \quad (6)$$

Kui kasutada spektraalset esitust (2), siis

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \\ x(t + \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(g) e^{-ig(t+\tau)} dg, \\ x(t)x(t + \tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) X(g) e^{i(g-\omega)t} e^{ig\tau} dg d\omega. \\ R_x(t, t + \tau) &= \mathbf{M}(x(t)x(t + \tau)) = \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M} \left(\frac{1}{4\pi^2} X^*(\omega) X(g) \right) e^{i(g-\omega)t} e^{ig\tau} dg d\omega = \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \delta(\omega - g) e^{i(g-\omega)t} e^{ig\tau} dg d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = R_x(\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

See on Fourier' pöördteisendus, seega

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (8)$$

Statsionaarse protsessi autokorrelatsioonifunktsioon on reaalne paarisfunktsioon,

$$R_x(\tau) = \mathbf{M}(x(t)x(t + \tau)) = \mathbf{M}(x(t - \tau)x(t)) = R_x(-\tau),$$

seega

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (9)$$

Kui on kaks protsessi, saame uurida vastastikust korrelatsiooni

$$R_{xy} = \mathbf{M}(x(t_1)y(t_2)) = \underbrace{R_{xy}(\tau)}_{\text{statsionaarsed } x \text{ ja } y}$$

ja vastastikust spektraalset tihedust

$$\begin{aligned}
S_{xy}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbf{M}(X^*(\omega, T) Y(\omega, T)) = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{i\omega t} dt \int_{-T}^T y(t) e^{-i\omega t} dt \right| = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.
\end{aligned} \tag{10}$$

Kuna

$$X(\omega) = A(\omega) - iB(\omega),$$

siis

$$\begin{aligned}
S_{xy}(\omega) &= \frac{|X^*(\omega) Y(\omega)|}{2T} = \\
&= \frac{1}{2T} [(A_x A_y + B_x B_y) - i(B_y A_x - B_x A_y)] = \\
&= C_{xy}(\omega) - iQ_{xy}(\omega)
\end{aligned} \tag{11}$$

C_{xy} – kospekter, Q_{xy} – kvadratuurspekter.

Vastastikuse spektri saab esitada ka mooduli ja faasi kaudu,

$$S_{xy}(\omega) = |S_{xy}(\omega)| e^{-i\phi_{xy}(\omega)}, \tag{12}$$

kus

$$|S_{xy}(\omega)| = \sqrt{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)} \text{ on moodul,} \tag{13}$$

ja

$$\phi_{xy}(\omega) = \arctan \frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)} - \text{faas.} \tag{14}$$

Füüsikaline sisu:

vastastikuse korrelatsiooni jagunemist harmooniliste vahel kirjeldab moodul, faas näitab võnkumiste $x(t)$ ja $y(t)$ faasierinevust olenevalt sagedusest ω .

Vaatleme kahte DFS paari

$$\begin{aligned}
x_k(t) &\stackrel{N}{\leftrightarrow} X_m(\omega) \\
y_k(t) &\stackrel{N}{\leftrightarrow} Y_m(\omega).
\end{aligned}$$

Iga reaalse a ja b korral

$$|a X_k(\omega) + b Y_k(\omega) e^{i\phi_{xy}(\omega)}|^2 \geq 0 \tag{15}$$

(kuivõrd see on mooduli ruut),

seega

$$\begin{aligned}
&a^2 |X_k(\omega)|^2 + ab [X_k^*(\omega) Y_k(\omega) e^{i\phi_{xy}(\omega)} + \\
&+ X_k(\omega) Y_k^*(\omega) e^{-i\phi_{xy}(\omega)}] + b^2 |Y_k(\omega)|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Kui leida k järgi matemaatiline ootus ja korrutada $1/T$ -ga, $T \rightarrow \infty$, siis

$$a^2 S_{xx}(\omega) + ab [S_{xy}(\omega) e^{i\phi_{xy}(\omega)} + S_{yx}(\omega) e^{-i\phi_{xy}(\omega)}] + b^2 S_{yy}(\omega) \geq 0$$

Nurksulgudes $[\] = 2|S_{xy}(\omega)|$, sest $S_{xy}(\omega) = S_{yx} * (-\omega)$.

Seega

$$a^2 S_{xx}(\omega) + 2ab|S_{xy}(\omega)| + b^2 S_{yy}(\omega) \geq 0.$$

Kui $b \neq 0$, siis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 S_{xx}(\omega) + 2\left(\frac{a}{b}\right)|S_{xy}(\omega)| + S_{yy}(\omega) \geq 0 \quad (16)$$

see on ruutkolmliige a/b suhtes, mis ei oma kahte erinevat reaalselt juurt, seega tema diskriminant ≤ 0 , st.

$$\begin{aligned} 4S_{xy}^2(\omega) - 4S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega) &\leq 0, \\ |S_{xy}(\omega)|^2 &\leq S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega) \end{aligned} \quad (17)$$

Selle võrratuse baasil defineeritakse koherentsusfunktsioon

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}, \quad (18)$$

mis iga ω korral $0 \leq \gamma_{xy}^2(\omega) \leq 1$.

12 Statistiline entroopia ja informatsioon

Vaatleme juhusliku suuruse väärtuste hulka E_1, E_2, \dots, E_n ja sellele vastavaid tõenäosusi p_1, p_2, \dots, p_n . Niisuguse tõenäosusskeemi korral saab määramatuse kirjeldamiseks kasutada Shannoni informatsioonientroopia mõistet,

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \quad (1)$$

Logaritmi alus määrab mõõtühiku: kui alus on 2, siis on ühikuks bit; kui alus on e , siis nit, 1 nit = 0.69315 bit. Kokkuleppeliselt, kui $p_i = 0$, siis $p_i \log p_i = 0$.

Kui katse tulemus, mille tõenäosus on p_k , on E_k , siis saab tulemusele seada vastavusse määramatuse $-\log p_k$, mida saab käsitleda kui informatsiooni katsetulemuse kohta: $x_k = -\log p_k$, $0 \leq x_k$, sest $p_k \leq 1$, seega

$$I(E_k) = -\log p_k \geq 0. \quad (2)$$

Kindlasti toimuva sündmuse tõenäosus on 1, see ei anna informatsiooni, $I(E_k) = 0$.

Määramatuse mõõduks kasutatakse informatsiooni (2) matemaatilist ootust indeksi k järgi

$$M(x) = \langle I(E_k) \rangle = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i = H(p_1, \dots, p_n). \quad (3)$$

Entroopiafunktsiooni $H(p_1, \dots, p_n)$ saab defineerida ka tema omaduste järgi.

- $H(p_1, \dots, p_n)$ peab olema pidev, s.t väikestele p_1, \dots, p_n muutustele vastavad väikesed H muutused;
- $H(p_1, \dots, p_n)$ peab olema sümmeetriline oma argumentide järjestuse suhtes,

$$H(p_1, \dots, p_n) = H(p_n, \dots, p_1). \quad (4)$$

c) Kuivõrd määramatus on kõige suurem võrdtõenäoste sündmuste korral, peab olema

$$\max H(p_1, \dots, p_n) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \quad (5)$$

d) Entroopiafunktsioon peab olema aditiivne, s.t. kui sündmust E_n saab vaadelda koosnevana komponentidest c_1, \dots, c_m tõenäosustega q_1, q_2, \dots, q_m , nii et

$$\sum_k q_k = p_n, \quad \text{või} \quad \frac{q_1}{p_n} + \dots + \frac{q_m}{p_n} = 1,$$

siis on E_n ühtlasi täielik ansambel, millel on entroopia

$$H_3\left(\frac{q_1}{p_n}, \dots, \frac{q_m}{p_n}\right).$$

Ansamblil E_1, \dots, E_n on entroopia $H_1(p_1, \dots, p_n)$ ja ansamblil $E_1, \dots, E_{n-1}, e_1, \dots, e_m$ entroopia $H_2(p_1, \dots, p_{n-1}, q_1, \dots, q_m)$, nii et

$$H_2 = H_1 + p_n H_3. \quad (6)$$

Pideva jaotuse korral defineeritakse diferentsiaalne entroopia

$$H(X) = M(-\log f(X)) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx. \quad (7)$$

See ei ole lihtsalt valemi (1) pidev analoog, sest kui $f(x)\Delta x$ korral rakendada valemit (1) ja minna piirile

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(- \sum f(x) \Delta x \log(f(x) \Delta x) \right) = \\ & = - \int f(x) \log f(x) dx + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(- \sum f(x) \Delta x \log \Delta x \right) = \\ & = - \int f(x) \log f(x) dx + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \frac{1}{\Delta x} = H(x) + \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Diferentsiaalne entroopia võib ka negatiivne olla.

Näited

1. Ühtlane jaotus

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{b-a}, \quad \frac{a+b}{2} = m_x \\ H(x) &= - \int_a^b \frac{1}{b-a} \log_2 \frac{1}{b-a} dx = \log_2(b-a) \end{aligned} \quad (9)$$

2. Eksponentsiaaljaotus

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \\ H(x) &= - \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \log_2(\lambda e^{-\lambda x}) dx = \log_2(\lambda e) \end{aligned} \quad (10)$$

3. Gaussi jaotus

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$H(x) = \log_2(\sqrt{2\pi}\sigma e). \quad (11)$$

Jaotused (9), (10) ja (11) on maksimaalse entroopiaga vastavalt lõigul $[a, b]$, $[0, \infty]$ ja $[-\infty, \infty]$.

Informatsiooni mõistet kasutatakse kahe juhusliku suuruse X ja Y korral. Kui ühe suuruse määramatuse mõõduks on entroopia $H(X)$, siis teise suuruse väärtuse teadmine vähendab entroopia väärtuseni $H(X|Y)$, kus

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y), \quad (12)$$

tinglik entroopia

$$H(X, Y) = - \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \ln f(x, y) dx dy.$$

Vahe

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (13)$$

on informatsioon juhusliku suuruse X kohta, mis saadakse juhusliku suuruse Y vaatlemisel. Seose (12) põhjal võib valemi (13) esitada ka kujul

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (14)$$

Entroopia saab esitada informatsiooni kaudu,

$$H(X) = I(X, X).$$

Kui X ja Y on sõltumatud, siis

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= H(X) \text{ ja} \\ I(X, Y) &= H(X) - H(X) = 0. \end{aligned}$$

Funktsionaalse seose korral $H(X|Y) = 0$ ja

$$I(X, Y) = H(X) = H(Y) = H(X, Y),$$

see on informatsiooni $I(X, Y)$ maksimaalväärtus, sest $H(X|Y) \geq 0$. Seega informatsioon (13) varieerub 0 ja $H(X)$ või $H(Y)$ vahel, seetõttu saab defineerida dimensioonita indeksi – infromatsiooniindeksi, mille väärtused on 0 ja 1 vahel,

$$q(X|Y) = \frac{I(Y, Y)}{H(Y)} = 1 - \frac{H(X|Y)}{H(Y)} \quad (15)$$

$$q(Y|X) = \frac{I(X, Y)}{H(Y)} = 1 - \frac{H(Y|X)}{H(Y)}.$$

Infromatsiooniindeksil on mõningaid eeliseid korrelatsioonifunktsiooni ees: monotoonse funktsionaalse sõltuvuse korral on $q = 1$, kui funktsionaalne seos ei ole üheselt pööratav, siis $q < 1$. Pideva jaotusega juhuslike suuruste X ja Y korral defineeritakse informatsioon samal viisil,

$$I(X, Y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \ln \frac{f(x, y)}{f_1(x) f_2(y)} dx dy. \quad (16)$$

Näeme, et informatsioon on suuruse

$$\ln \frac{f(X, Y)}{f_1(X) f_2(Y)} \quad \text{matemaatiline ootus.}$$

13 Juhuslike protsesside analüüsi meetodid

A. Parameetrite hinnangute statistilised vead

Vead:

- instrumentaalsed
- eksimused
- statistilised vead

$\{x(t)\}$ – statsionaarne juhuslik protsess. Olgu hinnatava parameetri tõeline väärtus Φ ja selle hinnang $\hat{\Phi}$, mis on saadud, mõõtes $x(t)$ realisatsiooni lõplikul lõigul T . Kuivõrd $x(t)$, $t \in [0, T]$ on üks konkreetne (juhuslik) realisatsioon, siis on parameetri Φ hinnang $\hat{\Phi}$ juhuslik suurus. Kui määrata $\hat{\Phi}$ mitme realisatsiooni põhjal, siis on soovitatav, et $M(\hat{\Phi}) = \Phi$ – **nihketa hinnang**. Kui $M(\hat{\Phi}) \neq \Phi$, siis

$$b(\hat{\Phi}) = M(\hat{\Phi} - \Phi) \quad (1)$$

on hinnangu nihe.

NB! See, et $b(\hat{\Phi}) = 0$ ei pruugi veel tähendada, et $\hat{\Phi} = \Phi$, kusjuures ei pruugi isegi $T \rightarrow \infty$ korral $\hat{\Phi} \rightarrow \Phi$!

$$\text{Ruutviga} = M(\hat{\Phi} - \Phi)^2 \quad (2)$$

Kui $M(\hat{\Phi} - \Phi)^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, siis on stabiilne hinnang (consistent estimate).

Ruutvea võib esitada kujul

$$\begin{aligned} M(\hat{\Phi} - \Phi)^2 &= M(\hat{\Phi} - M(\hat{\Phi}) + M(\hat{\Phi}) - \Phi)^2 = \\ &= M(\hat{\Phi} - M(\hat{\Phi}))^2 + M(M(\hat{\Phi}) - \Phi)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

kus

$$D(\hat{\Phi}) = \sigma_{\hat{\Phi}}^2 = M(\hat{\Phi})^2 - M^2(\hat{\Phi}) \quad (4)$$

on hinnangu dispersioon, ja teine liidetav on nihke ruut,

$$M(\hat{\Phi} - \Phi)^2 = D(\hat{\Phi}) + b^2(\hat{\Phi}). \quad (5)$$

B. Keskväertuse hinnang

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (6)$$

Kui $x(t)$ on statsionaarne, siis

$$\mu_x = M(x(t)) \quad (7)$$

ei sõltu ajast,

$$M(\hat{\mu}_x) = M\left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt\right) = \frac{1}{T} \int_0^T M(x(t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mu_x dt = \mu_x. \quad (8)$$

Järelikult (6) on keskvaärtuse nihketa hinnang, mis ei sõltu realisatsiooni pikkusest.

Kuivõrd $b = 0$, siis ruutviga = dispersioon,

$$D(\hat{\mu}_x) = M(\hat{\mu}_x - \mu_x)^2 = M(\hat{\mu}_x^2) - \mu_x^2,$$

kus

$$\begin{aligned} M(\hat{\mu}_x^2) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T M(x(t) c(u)) dt du = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_x(t - u) dt du = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_{-u}^{T-u} R_x(\tau) d\tau du = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_x(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

kus $R_x = K_x - \mu_x^2$.

Kui $|R_x(\tau)| > 0$ ainult $|\tau| \ll T$ korral, siis

$$D(\hat{\mu}_x) \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (10)$$

$\hat{\mu}_x$ on matemaatilise ootuse stabiilne hinnang (consistent estimate).

Mitme realisatsiooni korral saame mitu hinnangut $\hat{\mu}_x$ – realisatsiooni $x_i(t)$ keskvaärtus lõigul $[0, T_i]$. $D(\hat{\mu}_i)$ on vastavate keskvaärtuste dispersioonid.

Keskvaärtus üle realisatsioonide on

$$\hat{\mu}_x = \frac{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \hat{\mu}_i}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (11)$$

Hinnangu (11) dispersioon on

$$D(\hat{\mu}) = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}, \quad (12)$$

Võrdsete T_i -de korral $\sigma_i^2 = \text{const} = \sigma_1^2$ ja valemist (12) saame

$$D(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} \sigma_1^2 \quad (13)$$

Valemist (8) nägime, et $\hat{\mu}_x$ matemaatiline ootus ei olene T -st. Kui $T \rightarrow 0$, siis $\sigma_1^2 \rightarrow \sigma_x^2$ ja $D(\hat{\mu}) = \sigma_x^2/n$.

Ühe realisatsiooni korral (vt. (9))

$$D(\hat{\mu}) = \frac{\sigma_x^2 2 \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) r_x(\tau) d\tau}{T}.$$

seega

$$\frac{T}{2 \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) r_x(\tau) d\tau} = n_{eff} \quad (14)$$

on efektiivne sõltumatute lugemite arv.

Arvutades (8) kui $1/n \sum_i x(t_i)$, ei anna punktide arvu suurendamine suuremaks kui n_{eff} suuremat keskvärtuse täpsust.

$$\begin{aligned} D(\hat{\mu}) &= \frac{\sigma_x^2}{n}, \quad n < n_{eff} \\ &= \frac{\sigma_x^2}{n_{eff}}, \quad n > n_{eff} \end{aligned}$$

Näiteks sinusoid, $T < T_0$.

C. Dispersiooni hinnang

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (15)$$

on nihutatud hinnang. Nihketa hinnang on

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (16)$$

Tõestus. Esitame x_i kujul $x_i = y_i + a$, kus $a = M(x_i)$,

siis $M(y_i) = 0$, $D(y_i) = D(x_i) = \sigma^2$,

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

Kui lugemid on sõltumatud $i \neq j$ korral, siis $M(y_i y_j) = M y_i M y_j = 0$,

$$M \left(\sum_i (y_i - \bar{y})^2 \right) = M \left(\sum_i y_i^2 - n(\bar{y})^2 \right) \quad (17)$$

$$M((\bar{y})^2) = \frac{1}{n^2} M \left(\sum_i y_i^2 + 2 \sum_{i < j} y_i y_j \right) = \frac{M(y_i^2)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\begin{aligned} M(s^2) &= \frac{1}{n-1} M \left(\sum_i (y_i - \bar{y})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[M \left(\sum_i y_i^2 \right) - n M(\bar{y})^2 \right] = \frac{n\sigma^2 - \sigma^2}{n-1} = \sigma^2, \end{aligned} \quad (18)$$

s.t. nihketa hinnang on (16), (15) on asümptootiliselt nihketa, sest

$$\frac{n}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Juhusliku protsessi ruudu keskvärtuse hinnang

$$\hat{\Psi}_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad (19)$$

Matemaatiline ootus

$$\Psi_x^2 = \mathbf{M}(x^2(t)) \quad (20)$$

ei sõltu ajast. Hinnangu $\hat{\Psi}_x^2$ matemaatiline ootus

$$\mathbf{M}(\hat{\Psi}_x^2) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}(x^2(t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_x^2 dt = \Psi_x^2, \quad (21)$$

s.t. (19) on (20)-e nihketa hinnang.

Hinnangu (19) ruutviga:

$$\mathbf{D}(\hat{\Psi}_x^2) = \mathbf{M}((\hat{\Psi}_x^2 - \Psi_x^2)^2) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T (\mathbf{M}(x^2(t)x^2(u)) - \Psi_x^2) du dt. \quad (22)$$

Kui $x(t)$ on Gaussi protsess, siis on kõrgemad momendid arvatavad kahe esimese momendi kaudu, siis

$$\mathbf{D}(\hat{\Psi}_x^2) = \frac{2}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) (R_x^2(\tau) + 2\mu_x^2 R_x(\tau)) d\tau \quad (23)$$

ja kui $|\tau| \ll T$, siis

$$\mathbf{D}(\hat{\Psi}_x^2) \approx \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} (R_x^2(\tau) + 2\mu_x^2 R_x(\tau)) d\tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \quad (24)$$

s.t. (19) on ruudu keskvaartuse stabiilne hinnang.

D. Jaotustiheduse hinnang

Jaotustihedus on definitsiooni kohaselt (vt. punkt 8)

$$p(x) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ W \rightarrow 0}} \frac{\hat{P}(x, W)}{W}, \quad (25)$$

kus $\hat{P}(x, W)$ on tõenäosus, et protsessi $x(t)$ väärtus on vahemikus $[x - W/2, x + W/2]$,

$$\hat{P}(x, W) = \frac{T_x}{T}. \quad (26)$$

Lõplike T ja W korral saame hinnangu

$$\hat{p}(x) = \frac{\hat{P}(x, W)}{W} = \frac{T_x}{TW}. \quad (27)$$

Tõenäosus

$$P(x, W) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \int_{x - \frac{W}{2}}^{x + \frac{W}{2}} p(\xi) d\xi. \quad (28)$$

Hinnangu (27) matemaatiline ootus

$$\mathbf{M}(\hat{p}(x)) = \frac{\mathbf{M}(\hat{P}(x, W))}{W} = \frac{P(x, W)}{W} = \frac{1}{W} \int_{x - \frac{W}{2}}^{x + \frac{W}{2}} p(\xi) d\xi, \quad (29)$$

s.t. üldjuhul ei ole (27) nihketa hinnang. Nihke arvutamiseks arendame $p(\xi)$ Taylori ritta kohal x

$$p(\xi) = p(x) + (\xi - x)p'(x) + \frac{(\xi - x)^2}{2} p''(x),$$

asendades nüüd (29)-s, saame

$$b(\hat{p}(x)) \approx \frac{W^2}{2n} p''(x). \quad (30)$$

Jaotustiheduse hinnangu dispersioon

Jaotustiheduse hinnangu (27) võib esitada kui indikaatorfunktsiooni keskvaartuse

$$\frac{T_x}{TW} = \frac{\langle \epsilon_{x,W} \rangle}{W}. \quad (31)$$

$$\epsilon_{x,W}(t) = \begin{cases} 1 & x(t) \in \left[x - \frac{W}{2}, x + \frac{W}{2} \right] \\ 0 & x(t) \notin \left[x - \frac{W}{2}, x + \frac{W}{2} \right] \end{cases}$$

Keskvaartus on küll matemaatilise ootuse nihketa hinnang, aga see ei ole jaotustiheduse nihketa hinnang.

Jaotustiheduse hinnangu (31) dispersioon

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{W^2} \sigma_{\langle \epsilon \rangle}^2, \quad (32)$$

kus $\sigma_{\langle \epsilon \rangle}^2$ on keskvaartuse $\langle \epsilon_{x,W} \rangle$ dispersioon, selle arvutame valemiga (9),

$$\sigma_{\langle \epsilon \rangle}^2 = \frac{2}{T} \sigma_{\epsilon}^2 \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) r_{\epsilon}(\tau) d\tau, \quad (33)$$

kus

$$\sigma_{\epsilon}^2 = p(x)W - (p(x)W)^2. \quad (34)$$

Hindame integraali (33) väärtust:

$T \gg \tau_0$ korral $(\tau_0/T)^2 \rightarrow 0$, siis

$$\sigma_{\langle \epsilon \rangle}^2 \approx \frac{2I_{\epsilon}}{T} \sigma_{\epsilon}^2, \quad (35)$$

kus

$$I_{\epsilon} = \int_0^{T \rightarrow \infty} r_{\epsilon}(\tau) d\tau.$$

Valemist (32) saame

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{2I_{\epsilon}}{T} \left[\frac{p(x)}{W} - (p(x))^2 \right] \quad (36)$$

ja hinnangu (31) ja/või (27) ruutviga on

$$\sigma_{\hat{p}}^2 + b_{\hat{p}}^2$$

ning variatsioonikoeffitsient:

$$\frac{\sigma_x}{m_x} = \frac{\sqrt{\sigma_{\hat{p}}^2 + b_{\hat{p}}^2}}{p(x)} = \sqrt{\underbrace{\frac{2I_{\epsilon}}{T} \left[\frac{1}{W\hat{p}} - 1 \right]}_I + \underbrace{\left[\frac{W^2}{2n} - \frac{p''(x)}{\hat{p}} \right]}_II} \quad (37)$$

Kui

$$\begin{aligned} W \rightarrow 0, \text{ siis } I &\rightarrow \infty, \text{ II} \rightarrow 0 \\ W \rightarrow \infty, \text{ siis } \text{II} &\rightarrow \infty, \text{ I} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

siit järeldub, et on olemas niisugune W , et fikseeritud T korral oleks σ_x/m_x minimaalne.

Ülesanne. Leida optimaalne W_{opt} , et

$$\gamma_L = \min \left(\frac{\Delta \hat{p}}{\hat{p}} \right).$$

E. Korrelatsioonifunktsiooni hinnang

Definitsioonivalemist lähtudes võib hinnangu arvutada kui keskvärtuse

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t) y(t + \tau) dt \quad 0 \leq \tau < T \quad (38)$$

Kui $x = y$, siis saame autokorrelatsioonifunktsiooni

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t) x(t + \tau) dt. \quad (39)$$

Kui protsess on defineeritud lõigul $T + \tau$, võib (38) või (39) asemel kasutada integreerimispiirkonda $[0, T]$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (40)$$

Integraali (40) matemaatiline ootus on

$$\mathbf{M}(\hat{R}_{xy}(\tau)) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}(x(t) y(t + \tau)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R_{xy}(\tau) dt = R_{xy}(\tau). \quad (41)$$

Kasutusel on ka hinnang

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} x(t) y(t + \tau) dt, \quad (42)$$

siis

$$\mathbf{M}(\hat{R}_{xy}(\tau)) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{M}(x(t) y(t + \tau)) dt = \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_{xy}(\tau). \quad (43)$$

Hinnangu (42) kovariatsioon

$$\begin{aligned} K(\hat{R}_{xx}(u_1), \hat{R}_{xx}(u_2)) &= K \left[\frac{1}{T} \int_0^{T-u_1} x(t) x(t + u_1) dt, \frac{1}{T} \int_0^{T-u_2} x(v) x(v + u_2) dv \right] = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^{T-u_1} \int_0^{T-u_2} K[x(t) x(t + u_1), x(v) x(v + u_2)] dt dv \end{aligned} \quad (44)$$

Üldjuhul tekivad siin 4. järku momendid. Kui on Gaussi protsess, siis avalduvad need momendid madalamate järkude kaudu, (44) \rightarrow

$$\rightarrow \frac{1}{T^2} \int_{-(T-u_1)}^{T-u_2} \phi(r) [K_{xx}(r) K_{xx}(r + u_2 - u_1) + K_{xx}(r + u_2) K_{xx}(r - u_1)] dr, \quad (45)$$

kus $r = v - t$,

$$\phi_r = \begin{cases} T - u_2 - r & r \geq 0 \\ T - u_2 & -(u_2 - u_1) \leq r \leq 0 \\ T - u_1 + r & -(T - u_1) \leq r \leq -(u_2 - u_1). \end{cases}$$

Valemi (45) analüüsist järeldub korrelatsioonifunktsiooni hinnangute korreleeruvus lähedaste u_1 ja u_2 korral, s.t. hinnangu (42) dispersioon ei sumbu nii kiiresti kui tema matemaatiline ootus.

Kui $u_1 = u_2$, saame hinnangu (42) dispersiooni

$$D(R_{xx}(u)) = \frac{1}{T^2} \int_{-(T-u)}^{T-u} (T - u - |r|) [K^2(r) + K(r + u)K(r - u)] dr. \quad (46)$$

14 Spektraalse tiheduse hinnang

Olgu ξ_t juhuslik protsess korrelatsioonifunktsiooniga $K(\tau) = M(\xi_{t+\tau}\xi_t)$ ja spektraalse tihedusega $s(\omega)$. Olgu antud selle protsessi diskreetne realistasioon x_1, \dots, x_N . Ptk. 11-s defineerisime spektraalse tiheduse

$$s(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (1)$$

Diskreetse esituse korral defineerime

$$X_N(\omega) = \sum_{\tau=1}^N x_\tau e^{-i\omega\tau}. \quad (2)$$

Kasutades x_t spektraalset esitust

$$x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} X(\omega) d\omega \quad (3)$$

saame (2)-st

$$X_N(\omega) = \sum_{\tau=1}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu\tau} X(\mu) d\mu \right] e^{-i\omega\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu X(\mu) \sum_{\tau=1}^N e^{-i(\omega-\mu)\tau}. \quad (4)$$

Defineerime funktsiooni

$$D(\omega) = \sum_{\tau=1}^N e^{-i\omega\tau}, \quad (5)$$

siis

$$X_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\mu) D(\omega - \mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes D(\omega). \quad (6)$$

↑
sidum

Spektraalse tiheduse (1) diskreetne vaste on periodogramm

$$s_N(\omega) = \frac{1}{N} |X_N(\omega)|^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu X(\mu) D(\omega - \mu) \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \overline{X(\lambda)} \overline{D(\omega - \lambda)}. \quad (7)$$

↑
kaaskompleksfunktsioonid

Periodogrammi matemaatiline ootus

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(s_N(\omega)) &= \frac{1}{4\pi^2 N} \int_{-\pi}^{\pi} d\mu D(\omega - \mu) \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \overline{D(\omega - \lambda)} 2\pi \delta(\mu - \lambda) S(\mu) = \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} s(\mu) |D(\omega - \mu)|^2 d\mu. \end{aligned} \quad (8)$$

Defineerime funktsiooni

$$H(\omega) = |D(\omega)|^2 = \sum_{\tau} \sum_t e^{i\omega(t-\tau)} = \left[\frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \right]^2 \quad (9)$$

Siis on periodogrammi matemaatiline ootus

$$\mathbf{M}[s_N(\omega)] = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} s(\mu) H(\omega - \mu) d\mu = \frac{1}{2\pi N} s(\omega) \otimes H(\omega). \quad (10)$$

Kuna

$$\frac{1}{2\pi N} H(\omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \delta(\omega) \quad (\text{vt. (9)}), \quad (11)$$

siis

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{M}(s_N(\omega)) = s(\omega) \otimes \delta(\omega) = s(\omega). \quad (12)$$

Periodogramm on spektraalse tiheduse nihketa hinnang (unbiased estimate).

Periodogrammi dispersioon (Gaussi protsess)

$$\begin{aligned} D(s_N(\omega)) &= \left| \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} s(\lambda) D(\omega - \lambda) D(\omega + \lambda) d\lambda \right|^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} s(\lambda) H(\omega - \lambda) d\lambda \right)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Kui $N \rightarrow \infty$, siis (13) esimene liige annab

$$\begin{array}{ll} s^2(-\pi) & \text{kui } \omega = -\pi \\ s^2(0) & \omega = 0 \\ s^2(\pi) & \omega = \pi \\ 0 & \omega \neq -\pi, 0, \pi \end{array}$$

Teine liige annab $s^2(\omega)$.

Seega on dispersiooni piirväärtus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D(s_N(\omega)) = \begin{cases} 2s^2(\omega), & \omega = -\pi, 0, \pi \\ s^2(\omega), & \omega \neq -\pi, 0, \pi. \end{cases} \quad (14)$$

s.t. periodogramm on spektraalse tiheduse mittestabiilne, mittekooskõlaline hinnang. Sama tulemuse saame kui mitte $N \rightarrow \infty$ vaid $T \rightarrow \infty$. Tõestuseks kasutatakse järgmisi asjaolusid:

– kui $x(t)$ on Gaussi protsess, siis tema Fourier teisendus $X(\omega)$ kui integraal, s.t. lineaarkombinatsiooni piirväärtus $n \rightarrow \infty$ protsessist $x(t)$ on samuti Gaussi protsess ja tema reaalosa ning imaginaarosa kumbki eraldi võttes on ka Gaussi protsessid.

– Gaussi protsessi korral

$$\mathbf{M}(A^2(u)A^2(v)) = \mathbf{M}(A^2(u))\mathbf{M}(A^2(v)) + 2\mathbf{M}^2(A(u)A(v)),$$

sedalaadi seosed võimaldavad matemaatilise ootuse arvutamisel avaldada 4. järku momendid 2. järku momentide kaudu.

– kasutatakse peaaegu kõiki Fourier' teisenduse omadusi.

Dispersiooni vähendamiseks kasutatakse mitmeid moodusi.

A. Bartletti meetod

Realisatsioon pikkusega N jagatakse osalõikudeks N/p , spektri hinnang arvutatakse iga osalõigu jaoks ja tulemused keskmistatakse.

$$S(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p S^{(i)}(\omega). \quad (15)$$

B. Korrelatsioon- ja spektraalalgnad

Lähtume korrelatsioonifunktsiooni matemaatilisest ootusest (13.43) $R(\tau)(1 - \tau/T)$, leiame spektraalse tiheduse mitte otse realisatsioonist vaid korrelatsioonifunktsiooni matemaatilisest ootusest, siis

$$M[S(\omega)] = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (16)$$

võrdle (11.8). Sidumiteoreemi põhjal

$$M[S(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} T \left(\frac{\sin \frac{T\nu}{2}}{\frac{T\nu}{2}} \right)^2 G(\omega - \nu) d\nu, \quad (17)$$

kus

$$W(\nu) = T \left(\frac{\sin \left(\frac{T\nu}{2}\right)}{\frac{T\nu}{2}} \right)^2 \quad (18)$$

on kaalufunktsiooni $1 - \tau/T$ Fourier' teisendus ja $G(\omega)$ on tegelik otsitav spektraalne tihedus, s.t. $R(\tau)$ Fourier' teisendus.

Valemist (17) järeldub, et spektraalse tiheduse matemaatiline ootus saadakse silumata (teoreetilise) spektri vaatlemisel läbi spektraalse akna $W(\nu)$. Hinnang (17) on lõpliku T korral nihutatud,

$$b(\omega) = M[s(\omega)] - G(\omega). \quad (19)$$

C. Bartletti spektraalne ja korrelatsiooniaken

Kui tükeldame lähterealisatsiooni p tükiks pikkusega L , siis

$$S^{(i)}(\omega) = \int_{-L}^L \hat{R}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (20)$$

kus

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{1}{L} \int_{(i-1)L}^{iL-\tau} x(t) x(t + \tau) dt, \quad \tau > 0.$$

Kuna $M(\hat{R}) = R(\tau)(1 - \tau/L)$, siis realisatsiooni tükeldamine on samaväärne korrelatsiooniaknaga

$W = 1 - \tau/L$ või spektraalainena

$$W = L \left(\frac{\sin \omega L/2}{\omega L/2} \right)^2$$

Kasutusel on veel

	korrelatsiooniaken	spektraalne aken
täisnurkne	$w(u) = \begin{cases} 1 & u \leq M \\ 0 & u > M \end{cases}$	$W(\omega) = \frac{2M \sin \omega M}{\omega M}$
Tukey	$\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi u}{M} \right)$	$M \frac{\sin \omega M}{\omega M} \left(\frac{1}{1 - (\omega M)^2} \right)$
Parzeni	$1 - 6 \left(\frac{u}{M} \right)^2 + 6 \left(\frac{ u }{M} \right)^3 \quad u < \frac{M}{2}$ $2 \left(1 - \frac{ u }{M} \right)^3 \quad \frac{M}{2} < u \leq M$	$\frac{3}{4} M \left(\frac{\sin \frac{\omega M}{2}}{\frac{\omega M}{2}} \right)^4$
Gaussi	e^{-au^2}	$e^{-b\omega^2}$

D. Nyquist'i sagedus

Registreerime protsessi diskreetseil ajahetkedel $t = \Delta i$. Kui protsess on sinusoid

$$\lambda(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi f t), \quad (21)$$

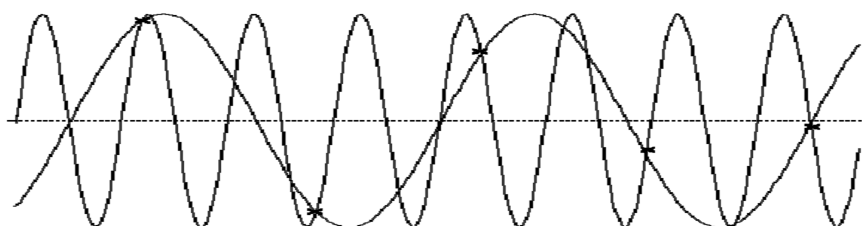
esitame f kujul

$$f = (p + q)/2\Delta, \quad (22)$$

kus p - täisarv, q - murdos, siis

$$\begin{aligned} \sin(2\pi f t) &= \sin(\pi(p + q)i) = \sin \pi i p \cos \pi i q + \cos \pi i p \sin \pi i q \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad = 1 \\ &= \sin \pi i q, \end{aligned} \quad (23)$$

Näeme, et (23) ei olene p -st, s.t. sagedused $f p = (p + q)/(2\Delta)$, $p = 0, 1, 2, \dots$ ei ole eristatavad.



Sagedus

$$\begin{aligned} f_N &= 1/2\Delta \\ \omega_N &= \pi/\Delta \end{aligned} \quad (24)$$

on Nyquisti sagedus, see on määratud lugemissammuga.

Teine tähtis sagedus on realisatsiooni pikkusega määratud põhisagedus,

$$f_1 = 1/N\Delta, \quad \omega_1 = 2\pi/N\Delta. \quad (25)$$

Põhisagedusest madalamad sagedused ei ole analüüsitavad lõigul $T = N\Delta$, need esinevad kui trend või mittestatsionaarsus. Nyquisti sagedusest kõrgemad sagedused ei ole eristatavad vahemikku (ω_1, ω_N) kuuluvatest sagedustest, energia sagedustel $\omega > \omega_N$ peegeldub sagedusele $\omega_N = (\omega - \omega_N)$. Kui on sagedusi $\omega > 2\omega_N$, siis need volditakse samuti vahemikku (ω_1, ω_N) . See nähtus on intermodulatsioon (naloženie chastot, aliasing).

E. Spektraalanalüüsi praktilised aspektid

Võimalikud moodused spektraalse tiheduse leidmiseks.

– Fourier' teisendusega (periodogramm), kasutades spektri silumiseks Bartletti meetodit või üle spektri keskmistamist – see on sidumi arvutamine.

– Blackman-Tukey meetod:

leitakse korrelatsioonifunktsiooni hinnang $\hat{r}_\xi(\tau)$, korrutatakse see korrelatsiooniaknaga, $h(\tau)\hat{r}_\xi(\tau)$, arvutatakse spektraalne tihedus kui $r_\xi(\tau) = h(\tau)\hat{r}_\xi(\tau)$ Fourier teisendus. Väga arvutusmahukas, sest iga τ jaoks vaja arvutada $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$.

– Fourier teisendusega leitakse $\hat{S}(\omega)$, sellest arvutatakse $\hat{r}_\xi(\tau)$ (Fourier' teisendusega), $\hat{r}_\xi(\tau) \rightarrow h(\tau)r_\xi(\tau)$, Fourier pöördteisendusega leitakse uuesti $S_\xi(\omega)$.

NB! Spektraalse lahutuse suurendamiseks võib korrelatsioonifunktsioonile lisada nulle:

$$f_1 = 1/N\Delta, \text{ kui } N \rightarrow 2N, \text{ siis } f_1 \rightarrow f_1/2.$$

Fourier' spektris on kõik sagedused f_1 kordsed vahemikus f_1, f_N , seega $N \rightarrow 2N$ annab meile spektri 2 korda tihedama sammuga, sest Nyquisti sagedus jääb endiseks.

– ribafiltri rakendamine otse protsessile

$$\hat{S}(\omega) = 1/B_e M[x^2(t, \omega, B_e)],$$

kus B_e – filtri efektiivne laius.

15 Statsionaarne juhuslik protsess ja lineaarne füüsikaline süsteem

Vaatleme protsesse $y(t)$ ja $x(t)$, kusjuures $y(t)$ on saadud $x(t)$ -st mingi operaatori L toimel.

$$y(t) = L(x(t)). \quad (1)$$

Iga füüsikaline süsteem on mingi operaator, x – sisendsignaal, y – väljundsignaal. Operaator L (süsteem L) on lineaarne, kui kehtib superpositsiooniprintsiip,

$$L(cx(t)) = cL(x(t)), \quad (2)$$

$$L(x_1(t) + x_2(t)) = L(x_1(t)) + L(x_2(t)). \quad (3)$$

Operaatorid, mille korral (2) ja (3) ei pea paika, on mittelineaarsed.

Lineaarsete operaatorite näited:

- diferentseerimine d/dt
- integreerimine $\int \dots dt$

Mittelineaarse operaatori näiteks on astendamine.

Lineaarne on ka resultantoperaator, mis koosneb kahe lineaarse operaatori järjestikusest rakendamisest,

$$L(x(t)) = L_1(L_2(x(t))), \quad (4)$$

kui L_1 ja L_2 on lineaarsed, siis ka L on lineaarne.

Lineaarne operaator on invariantne aja suhtes, kui $y(t) = L(x(t))$ ja $y(t - t_0) = L(x(t - t_0))$.

Keskväärtuse leidmine on lineaarne operaator,

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt,$$

seega

$$\begin{aligned} \text{kui } y(t) &= L(x(t)), \\ \text{siis } m_y &= L(m_x). \end{aligned} \quad (5)$$

Korrelatsioonifunktsioon

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \mathbf{M}[y(t_1)y(t_2)] = \\ &= \mathbf{M}[L^{(t_1)}(x(t_1))L^{(t_2)}(x(t_2))] = \end{aligned}$$

kuna \mathbf{M} on lineaarne operaator, võib \mathbf{M} ja L rakendamise järjekorra ära vahetada,

$$\begin{aligned} &= L^{(t_1)}L^{(t_2)}[\mathbf{M}(x(t_1)x(t_2))] = \\ &= L^{(t_1)}L^{(t_2)}R_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Lineaarteisendus spektriruumis

Füüsikalise süsteemi uurimiseks on tulus kasutada δ -impulssi. Tähistame

$$h(t, \tau) = L(\delta(t - \tau)). \quad (7)$$

$h(t, \tau)$ – kaalufunktsioon (impulsskarakteristik), iseloomustab süsteemi. $h(t, \tau)$ on väljundsignaali väärtus hetkel t , kui hetkel $t = 0$ anti sisendile δ -impulss. Kui süsteemi parameetrid ei muutu ajas, on $h(t, \tau)$ statsionaarne, s.t. ta on funktsioon ajavaheemikust $t - \tau$.

Kaalufunktsiooni abil saab kirjeldada operaatori rakendamist funktsioonile $x(t)$, mis on määratud lõigul $[a, b]$,

$$y(t) = L(x(t)) = \int_a^b h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Kui $x(t)$ on määratud $t \in (-\infty, \infty)$ -l, siis (8) \rightarrow

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Kui operaator L on statsionaarne, siis on kaalufunktsioon h ainult ajavahest $t - \tau$, muudame tähistust $t - \tau \rightarrow \tau$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (10)$$

Et süsteem L oleks füüsiliselt realiseeritav, peab väljundfunktsioon y olenema ainult $x(t)$ väärtustest möödunud aja jooksul, $h(\tau) = 0 \quad \tau \leq 0$,

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (11)$$

Süsteem (11) on **kausaalne süsteem**.

Füüsikaline süsteem on **stabiilne**, kui tõkestatud sisendsignaali korral ka väljundsignaal on tõkestatud,

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |h(\tau)| |x(t - \tau)| d\tau,$$

Leidub konstant A , et $x(t) \leq A$, s.t. $x(t)$ tõkestatud, siis

$$|y(t)| \leq A \int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau \quad (12)$$

See on süsteemi stabiilsuse vajalik tingimus.

Ajas muutuvate parameetritega süsteem

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t) x(t - \tau) d\tau.$$

Füüsikalise realiseeritavuse ja stabiilsuse tingimused on samad mis konstantsete parameetritega süsteemi korral. Kuivõrd (9) või (11) on sidum, on analüüs lihtsam spektriruumis. Olgu $x(t) = \cos \omega t$, siis

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cos(\omega(t - \tau)) d\tau = A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t,$$

kus

$$A(\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$B(\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau) \sin \omega \tau d\tau,$$

ehk

$$y(t) = G(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)), \quad (13)$$

kus

$$G(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad (14)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left(-\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right) \quad (15)$$

S.t. sinusoidaalse sisendfunktsiooni korral on väljundfunktsioon sama sagedusega sinusoid, mille amplituud on korrutatud $G(\omega)$ -ga – võimendustegur, ja faas nihutatud $\phi(\omega)$ – faasinihe – võrra.

Komplekssignaali $x(t) = e^{i\omega t}$ korral

$$y(t) = H(\omega)e^{i\omega t},$$

kus

$$H(\omega) = G(\omega) e^{i\phi(\omega)} = \int_0^\infty h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (16)$$

on sageduskarakteristik.

Suvalise signaali arendame Fourier ritta (võtame Fourier' integraali). Iga sageduse jaoks

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^\infty h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^\infty h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^\infty x(v) e^{-i\omega v} dv, \end{aligned} \quad (17)$$

seega $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$. Näeme, et füüsikaline süsteem on **filter**, mis üldjuhul muudab sisendsignaali iga spektraalkomponendi amplituudi erinevalt.

Järjestikused operaatorid (süsteemid),

$$Y(\omega) = H_k(\omega) H_{k-1}(\omega) \dots H_1(\omega) X(\omega). \quad (18)$$

Süsteemi karakteristikute määramiseks on vaja

– mõõta sisend- ja väljundspektrid,

$$\text{siis } H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega),$$

$$h(\tau) \leftrightarrow H(\omega).$$

– anda sisendile δ -impulss ja mõõta süsteemi reaktsioon $h(\tau)$.

Kolmas võimalus – uurida korrelatsiooni sisend- ja väljundsignaali vahel

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \mathbf{M}(x(t)y(t + \tau)) \\ y(t) &= \int_0^\infty x(t - \tau)h(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \mathbf{M} \left(\int_0^\infty x(t) x(t + \tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda \right) = \\ &= \int_0^\infty \mathbf{M}(x(t) x(t + \tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda) = \\ &= \int_0^\infty R_x(\tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

Samal viisil

$$R_{yx}(\tau) = \int_0^{\infty} R_x(\tau + \lambda) h(\lambda) d\lambda. \quad (20)$$

Kuivõrd $x < 0$ korral $h(\lambda) = 0$, siis $R_{yx}(\tau) = R_{xy}(\tau)$ ainult $\tau = 0$ korral. Kui sisendsignaali on valge müra, siis $R_x(\tau) = S_0\delta(\tau)$ ja

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} S_0 h(\tau) & \tau \geq 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases} \quad (21)$$

Samal viisil

$$R_{yx}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau > 0 \\ S_0 h(-\tau) & \tau \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

↗ valge müra ja viiteliini abil saame määrata süsteemi impulsskarakteristikuid. Eelis võrreldes δ -impulsiga on, et ei teki probleeme dünaamilise diapasoonega.

16 Juhusliku funktsiooni filtreerimine

Seosest (15.17) järeldub, et füüsikaline süsteem on filter. Sageli on vaja modelleerida signaali käitumist füüsilises süsteemis või mingil muul põhjusel eraldada mingi osa signaali spektrist (müra, perioodiline komponent, kujutise kontuuride esiletõmine jne.). Selleks kasutatakse numbrilist filtreerimist.

Filtrid:

mitterekursiivfiltrid

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \dots],$$

rekursiivfiltrid

$$y(n) = F(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots).$$

Teine klassifikatsioon:

lõpliku ja lõpmatu impulsskarakteristikuga.

Konstantsete parameetritega füüsiliste süsteemide üks tähtis ja ulatuslik klass on diskreetsed süsteemid, mis on kirjeldatavad diferentsvõrranditega

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i), \quad n \geq 0, \quad (1)$$

kus kordajad $\{a_i\}$ ja $\{b_i\}$ määravad süsteemi.

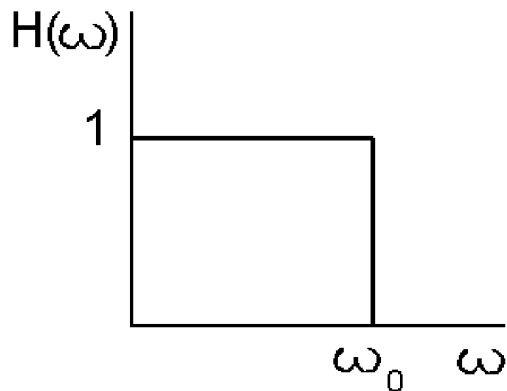
Erijuhud

$M = 1$ 1. järku süsteem

$M = 2$ 2. järku süsteem

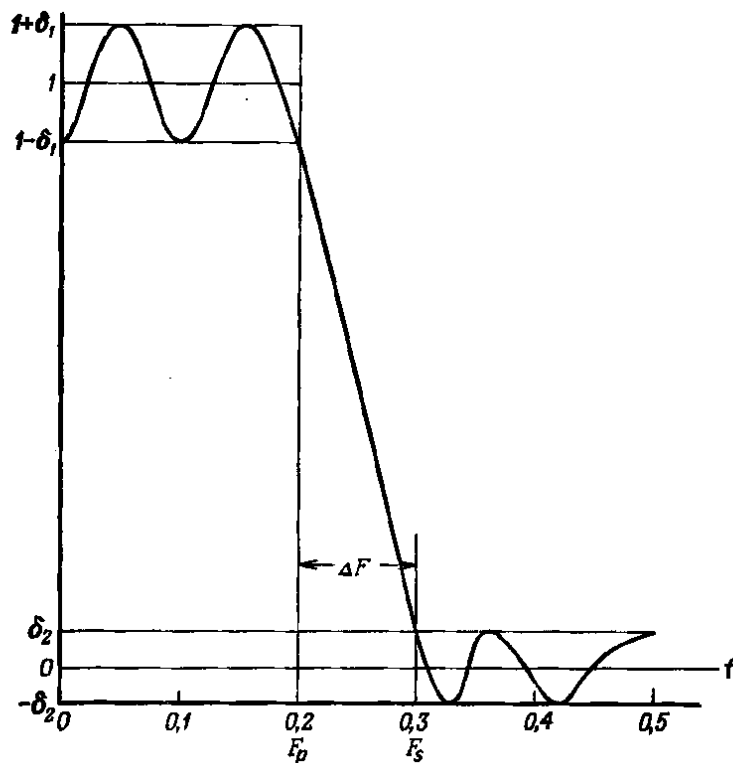
Kõik kõrgemat järku süsteemid on taandatavad nende kahe süsteemi järjestikustele rakendamistele.

Vaatleme ideaalset madalsagedusfiltrit



Selle filtri impulsskarakteristik on lõpmatu ulatusega ostsilleeruv funktsioon $\sim (\sin t)/t$.

Kui tõkestame signaali-ruumis analüüsi-vahemiku $t \in [-T, T]$, siis on tulemuseks filtri sageduskarakteristiku deformeerumine



Ülesanne taandub niisuguste $\{a_i\}$ ja $\{b_i\}$ otsimisele, et etteantud impulssfunktsiooni ulatuse T korral tagada $\delta_1, \delta_2, \omega_1, \omega_2$ vastuvõetavus. Mõnikord võivad osutada kriitiliseks ka lokaalsete miinimumide ja maksimumide asukohad. Rekursiivsete filtrite korral tekib probleem filtri stabiilsusest.

Kujutiste ja geofüüsikaliste väljade analüüsi korral on vajalik 2-mõõtmeline filtreerimine,

$$g(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

ja selle diskreetne vaste

$$g(n, m) = \sum_k \sum_l f(n - k, m - l) h(k, l).$$

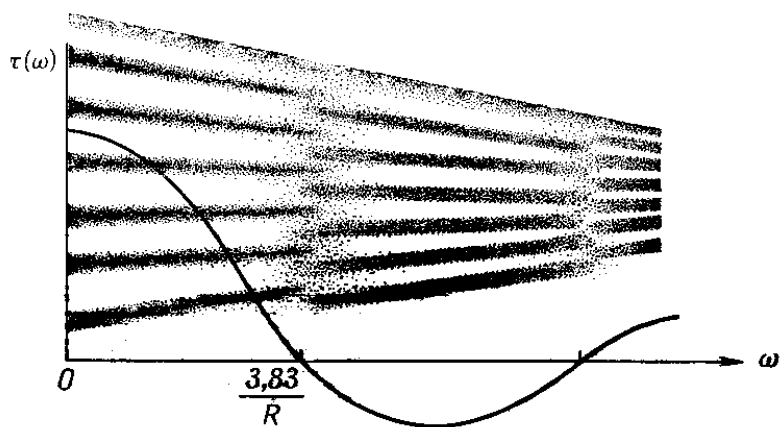
Mõnel erijuhul on impulsskarakteristik eralduvate muutujatega

$$\begin{aligned} h(x, y, \xi, \eta) &= a(x, \xi)b(y, \eta) \\ &= a(x - \xi)b(y - \eta) \end{aligned}$$

või ruumilis-invariantne $= h(x - \xi, y - \eta).$

Kahemõõtmelise filtri arvutus püütakse võimalust mööda taandada ühedimensionaalse filtri arvutuseks, vt. spets. kirjandust, näiteks Rabiner, Gold, 1978.

Halva filtri näid



Detsimatsioon. Kui lugemeid on liiga palju, võib muist välja visata, aga eelnema peab filtreerimine madalpääsfiltriga, mille läbilaske piirsagedus vastab uue jada Nyquisti sagedusele,

$$f_{N,0} \rightarrow f_{N,1} = \frac{f_{N,0}}{p}.$$

Pöördetsimatsioon. Lisatakse vajalik arv nulle iga lugemi vahele, filtreeritakse ja mastabeeritakse ümber.

17 Mittestatsionaarsete protsesside analüüs

Mittestatsionaarsus – s.o. negatiivne konstateering, s.t. statsionaarsuse puudumist. See konstateering ei konkretiseeri mittestatsionaarsuse loomust.

Mittestatsionaarsuse näited:

- keskväärtuse mittestatsionaarsus,
- dispersiooni mittestatsionaarsus,
- spektraalse tiheduse mittestatsionaarsus. (vt. Bendat & Pirsol).

Statistikute definitsioonid on samasugused nagu statsionaarsete protsesside korral, aga sisse jääb olenevus ajast,

$$p(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x}. \quad (1)$$

see on 2-dimensionaalne funktsioon, mille eksperimentaalne määramine on töömahukas, nõuab keskmistamist üle ansambli.

Tsvetkov (1973) eristab kolme liiki statistikuid:

- lokaalsed, s.t. keskmised ajas,
- (jooksvad, hetkelised) – keskmine üle realisatsioonide (ruumis)
- keskmistatud, s.t. keskmistatud nii ajas kui ruumis.

NB! Mittestatsionaarsus on võimalik ka ansambelis, s.t. ansambli indeksi suhtes.

Näide (Bendat, Pirsol, 1971)

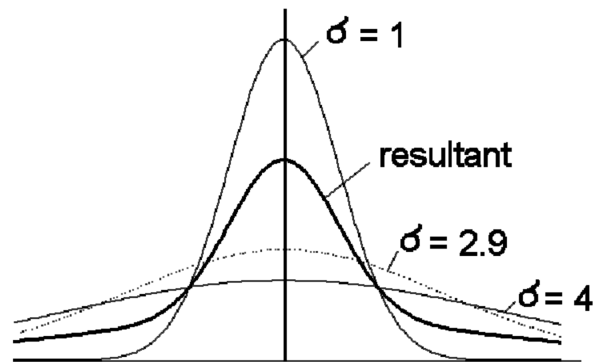
$$x_1 : \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_1^2}$$

$$x_2 : \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_2^2}$$

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\sigma_1} e^{-x^2/2\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2} e^{-x^2/2\sigma_2^2} \right],$$

$\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 16$ annab resultaadiks $\hat{\sigma} = 2.9$, aga tegelik resultantjaotus erineb oluliselt Gaussi jaotusest

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} e^{-x^2/2\hat{\sigma}^2}.$$



A. Keskväärtus

Keskväärtuse hinnang

$$\hat{\mu}_x(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_i(t) \quad (2)$$

on nihketa hinnang. Tõestus nagu statsionaarsete protsesside korral.

Keskväärtuse dispersioon

$$D(\hat{\mu}_x(t)) = \frac{\sigma_x^2(t)}{N}, \quad (3)$$

kui on sõltumatud realisatsioonid.

NB! Sõltumatuse kontroll on mittestatsionaarsete protsesside korral väga tülikas.

Korreleeritud realisatsioonid. Arvutame korrelatsioonimomendi

$$M(x_i(t)x_j(t)) = R_x(k, t), \quad k = i - j \quad (4)$$

↗ mittestatsionaarne ruumiline vastastikuse korrelatsiooni funktsioon.

Kui mittekorreleeruvad, siis

$$R_x(x, t) = \mathbf{M}(x_i(t)x_j(t)) = \mathbf{M}(x_i(t))\mathbf{M}(x_j(t)) - \mu_x^2(t), \quad (5)$$

Korreleeruvate realisatsioonide korral

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\hat{\mu}_x) &= \frac{\sigma_x^2}{N} + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{M}[(x_i(t) - \mu_x(t)) \cdot (x_j(t) - \mu_x(t))] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{N} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} (R_x(j - i, t) - \mu_x^2) = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (N - k)[R_x(k, t) - \mu_x^2(t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Täieliku sõltuvuse korral $R_x(k, t) = \sigma_x^2(t) + \mu_x^2(t)$, siis

$$\mathbf{D}(\hat{\mu}_x) = \sigma_x^2/N + \frac{1}{N^2}(N^2 - N)\sigma_x^2 = \sigma_x^2 \quad (7)$$

B. Mittestatsionaarse protsessi korrelatsioon

Kaks protsessi keskvärtustega $\mu_x(t), \mu_y(t)$,

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \mathbf{M}(x(t_1)x(t_2)), \\ R_{xy}(t_1, t_2) &= \mathbf{M}(x(t_1)y(t_2)) = \mathbf{M}(x(t)y(t + \tau)) \end{aligned} \quad (8)$$

Mittestatsionaarse protsessi korrelatsioonifunktsioon ei ole sümmeetriline, ka maksimum võib olla nihutatud.

Korrelatsiooniraadius statsionaarse protsessi korral

$$\Delta\tau_r = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau}{2R_x(0)}, \quad (9)$$

sama on kasutatav ka mittestatsionaarsete protsesside korral,

$$\Delta\tau_r(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_x(t, \tau) d\tau}{2R_x(t, 0)} \quad - \text{hetkeline} \quad (10)$$

$$\Delta\tau_r(k) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_x(k, \tau) d\tau}{2R_x(k, 0)} \quad - \text{lokaalne} \quad (11)$$

k – realisatsiooni number.

Valemi (10) või (11) keksmistamine annab keskmise korrelatsiooniraadiuse

$$\Delta\tau_r = \overline{\Delta\tau_r(t)} = \langle \Delta\tau_r(k) \rangle .$$

C. Mittestatsionaarse protsessi spekter

Protsess $x(t)$,

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega),$$
$$x(t_1)x(t_2) = \frac{1}{2\pi} \int X^*(\omega_1) e^{-i\omega_1 t_1} d\omega_1 \cdot \frac{1}{2\pi} \int X(\omega_2) e^{i\omega_2 t_2} d\omega_2, \quad (12)$$

(12) matemaatiline ootus

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (13)$$

kus

$$S_x(\omega_1, \omega_2) = M[X^*(\omega_1) X(\omega_2)]. \quad (14)$$

NB! Mittestatsionaarse protsessi spekter on 2-D funktsioon justnagu vastastikune spektraalne tihedus. Statsionaarse protsessi korral on kogu spektraalne tihedus koondunud joonele $\omega_1 = \omega_2$.

Kuivõrd $X(\omega)$ ei ole otseselt mõõdetav, ei saa ka üldistatud spektraalset tihedust (14) otseselt määrata, vaja leida mittestatsionaarne korrelatsioonifunktsioon $R_x(t_1, t_2)$ ja selle kahekordne Fourier' teisendus. Valemi (14) otsesel rakendamisel $S_x(\omega_1, \omega_2)$ leidmiseks on probleemiks integreerimine aja järgi – keskmistame välja mittestatsionaarsuse.

Mittestatsionaarse protsessi spektraalanalüüsiga on põhimõttelisi raskusi: ortogonaalsete harmoonikute järgi saab ritta arendada ainult statsionaarset protsessi. Statsionaarsete protsesside analüüsiks rakendatavate meetodite formaalne rakendamine annab küll alati mingi tulemuse, aga tulemus hakkab olenema teostatavate operatsioonide järjekorrast (vrld. spektraalse tiheduse leidmine otse protsessist või korrelatsioonifunktsiooni kaudu).

Teine praktiline võimalus mittestatsionaarse protsessi spektraalse tiheduse määramiseks: laseme protsessi läbi kitsasribafiltri ja siis tõstame ruutu. Nii saame füüsiliselt realiseeritava ühepoolse spektraalse tiheduse $\omega \in (0, \infty)$. Filtri läbilaskeriba laius peab olema kompromiss spektraalse lahutuse ja väljasilumise vahel. Teine kompromiss tuleb leida nihke ja realisatsioonide arvu lõplikkusest tingitud statistilise dispersiooni vahel.

Ajas keskmistatud mittestatsionaarne spektraalne tihedus määratakse nagu statsionaarse protsessi spektraalne tihedus. Lisaks riba laiusest tingitud nihkele ja statistilisele veale lisandub ajalisest keskmistamisest tingitud nihe.

Hetkeline spekter

$$s_x(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau, t) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (15)$$

kus

$$R_x(\tau, t) = M[x(t - \frac{\tau}{2}) x(t + \frac{\tau}{2})]. \quad (16)$$

Seos (15) on Fourier' teisendus, selle pöördteisendus on

$$R_x(\tau, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega, t) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Kui $\tau = 0$, siis

$$M[x^2(t)] = R_x(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega, t) d\omega \geq 0. \quad (17)$$

Keskmine energia on integraal spektraalsest tihedusest $s_x(\omega, t)$, ehk, spektraalne tihedus $s_x(\omega, t)$ on keskmine energia jaotus sageduste järgi.

D. Mittestatsionaarne protsess lineaarses süsteemis

Kui sisendprotsess on $x(t - \tau)$, siis väljundprotsess

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (18)$$

Kausaalses süsteemis $h(\tau) = 0, \tau < 0$. Kui süsteemi parameetrid muutuvad ajas, siis $h = h(t, \tau)$, nii võib tekkida mittestatsionaarne protsess.

Väljundprotsessi korrelatsioonifunktsioon

$$R_y(t_1, t_2) = M(y(t_1) y(t_2)) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h(\xi) R_x(t_1 - \tau, t_2 - \xi) d\tau d\xi \quad (19)$$

ja spektraalne tihedus kui (19) kahekordne Fourier' teisendus

$$S_y(\omega_1, \omega_2) = H^*(\omega_1) H(\omega_2) S_x(\omega_1, \omega_2). \quad (20)$$

Statsionaarse protsessi korral S_x erineb nullist ainult $\omega_1 = \omega_2$ korral, siis $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$.

Korrelatsioon sisend- ja väljundprotsessi vahel

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) R_x(t_1, t_1 - \tau) d\tau, \quad (21)$$

$$S_{xy}(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_2) S_x(\omega_1, \omega_2), \quad (22)$$

kus $H(\omega)$ on impulsskarakteristiku Fourier' teisendus.

E. Statsionaarsete juurdekasvudega protsess

See on protsess, mille korral

$$\langle \Delta x_{\Delta t}(t) \rangle = \langle x(t + \Delta t) \rangle - \langle x(t) \rangle = \text{const.} \quad (23)$$

Protsess

$$x(t + \Delta t) - x(t) \quad (24)$$

on juhuslik protsess ja kui kehtib (23), siis see on statsionaarne protsess.

Protsessi $x(t)$ korrelatsioonifunktsiooni võib esitada kujul

$$R_x(t, \tau) = \frac{1}{2} [R_x(t, 0) + R_x(t - \tau, 0) - R_{\Delta x}(\tau)],$$

kus $R_{\Delta x}$ on protsessi (24) korrelatsioonifunktsioon. Statsionaarsete juurdekasvude korral

$$R_x(t, \tau) = \frac{1}{2}[R_x(t, 0) + R_x(t - \tau, 0) - R_{\Delta x}(|\tau|, 0)], \quad (25)$$

Statsionaarne protsess on statsionaarsete juurdekasvudega protsessi erijuhus.

Sageli õnnestub mittestatsionaarseid protsesse lõplikul lõigul käsitada kui statsionaarsete juurdekasvudega protsesse.

Kirjandus

- Olberg, M., Rakoczi, F. (1984), Informationstheorie in Meteorologie und Geophysik, Akademie–Verlag, Berlin, 181.
- Papoulis, A. (1977), Signal Analysis, McGraw–Hill Book Company, New York, 431.
- Robinson, E.A. (1981), Time Series Analysis and Applications, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht/Boston/Lancaster, 621.
- Tiit, E. (1968), Tõenäosusteooria. I. Loengukonspekt, Tartu, TRä, 319.
- Tiit, E. (1969), Tõenäosusteooria. II, Tartu, TRÜ, 300.
- Tiit, E.–M. (1991), Andmeanalüüs personaalarvutil programmpaki Statgraphics abil. I osa, Tartu Ülikool, Tartu, 196.
- Андерсон Т. (1976), Статистический анализ временных рядов, М., Мир, 755.
- Бендат Дж., Пирсол А. (1971), Измерение и анализ случайных процессов, М., Мир, 408.
- Брейсуелл Р. (1990), Преобразование Хартли, М., Мир, 175.
- Бриллинджер Д. (1980), Временные ряды. Обработка данных и теория, М., Мир, 536.
- Гнеденко Б.В. (1969), Курс теории вероятностей, М., Наука, 400.
- Даджион Д., Мерсеро Р. (1988), Цифровая обработка многомерных сигналов, М., Мир, 488.
- Дженкинс Г., Ватц Д. (1971, 1972), Спектральный анализ и его приложения. В 2–х т. М., Мир, 316, 287.
- Доценко С.В. (1983), Случайные процессы в гидрофизических измерениях, Гидрометеиздат, Л., 239.
- Казакевич Д.И. (1971), Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии, Л., Гидрометеиздат, 276.
- Купер Дж., Макгиллем К. (1989), Вероятностные методы анализа сигналов и систем, М., Мир, 376.
- Курно Ог. (1970), Основы теории шансов и вероятностей, М., Наука, 384.
- Левин Б.Р. (1969, 1968, 1976), Теоретические основы статистической радиотехники. В 3–х т. М., Сов. радио, 751Б503Б285.
- Марпл–мл С.Л. (1990), Цифровой спектральный анализ и его приложения, М., Мир, 584.
- Отнес Р., Эноксон Л. (1982), Прикладной анализ временных рядов. Основные методы, М., Мир, 428.

- Рабинер Л., Гоулд Б. (1978), Теория и применение цифровой обработки сигналов, М., Мир, 848.
- Свешников А.А. (1968), Прикладные методы теории случайных функций, М., Наука, 463.
- Трахтман А.М. (1972), Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов, М., Сов. радио, 352.
- Тутубалин В.Н. (1972), Теория вероятностей, М., Изд. МГУ, 230.
- Феллер В. (1984), Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. М., Мир, 527, 751.
- Хастингс Н., Пикок Дж. (1980), Справочник по статистическим распределениям, М., Статистика, 95.
- Хеннан Э. (1974), Многомерные временные ряды, М., Мир, 575.
- Худсон Д. (1967), Статистика для физиков. Лекции по теории вероятностей и элементарной статистике, М., Мир, 242.
- Цветков Э.И. (1973), Нестационарные случайные процессы и их анализ, М., Энергия, 128.